ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
Клячко Антона Александровича
"Уравнения в группах и смежные вопросы",
представленную на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности
1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел).

Вопросы, связанные с разрешимостью уравнений, являются центральными во всей математике. Как правило, рассматриваются следущие проблемы: классификация уравнений по различным свойствам, существование решений, описание всех возможных решений; изучаются свойства решений и т.п. Уравнения в группах – старая и хорошо представленная область теории групп. Вопросам, связанным с уравнениями, уделяли внимание многие выдающиеся математики: Ф.Г. Фробениус, В. Магнус, А.И. Мальцев, Р. Линдон, Б. и Х. Нейман, Г. Баумслаг и др. Широко известны результаты Г.С. Маканина и А.А. Разборова о разрешимости систем уравнений в свободной группе и возможности полного описания их решений. На рубеже 20 и 21 столетий усилиями прежде всего Г. Баумслага, В.Н. Ремесленникова и А.Г. Мясникова, а также Б.И. Плоткина, сформировалась новая область теории групп – алгебраическая геометрия над группами, напрямую связнная с разрешимостью уравнений в группах. Все это привело к решениям знаменитых проблем А. Тарского, полученных А.Г. Мясниковым и О.Г. Харлампович и независимо – Ц. Селой.

В настоящее время интерес к исследованию уравнений над группами только возрастает. Рассматриваются проблемы разрешимости уравнений в различных классах групп, например, в групповых многообразиях (работы О.Г. Харлампович, А.Г. Мясникова, И.Г. Лысенка, А.А. Ушакова, Е.И. Тимошенко, В.Г. Дурнева, О.В. Богопольского, автора этих строк и др.). Многие проблемы связанные с уравнениями в группах имеют алгоритмический характер. Алгоритмические проблемы оказывают сильное влияние на развитие современной компьютерной науки. Начиная с 60-х годов прошлого столетия, в которые обозначился рост интереса к проблемам сложности, в центре внимания как математиков, так и специалистов в компьютерных науках, оказались вопросы вычислительной сложности теоретико-групповых алгоритмов. Некоторые идеи, известные в теории сложности, позволили получить результаты высокого уровня в алгоритмической теории групп. До этого алгоритмические проблемы теории групп исследовались в основном с точки зрения их разрешимости. Р. Липтоном и И. Залстейном был разработан логарифмический по сложности алгоритм решения проблемы равенства в конечно порожденных линейных группах. Это был первый результат такого сорта. За последние годы появился целый ряд результатов (А.Г. Мясникова, А. Вейса, А. Гарреты, С. Василевой, Д. Макдональда, Д. Овчинникова и др.) об алгоритмах в теории групп, в том числе об алгоритмах относящихся к разрешимости уравнений, имеющих малую сложность. Эти результаты имеют практическое значение. Новые связи между теорией групп и теорией сложности были установлены в теории автоматов, компрессии данных и т.п.

Значительную часть современной теории групп занимают результаты автора диссертации, многие из которых опубликованы в совместных работах с его учениками. Без этой части картина была бы неполной. В диссертацию вошли далеко не все результаты автора. Многие интересные результаты остались за ее пределами. Отличительной особенностью его исследований является оригинальный выбор задач, среди которых встречаются как известные проблемы, так и неожиданные постановки вопросов. Также следует отметить оригинальность методов решения поставленных задач и законченность их решения. Содержание каждой его работы как правило описывается кратко и ясно. Это как раз и есть свидетельство завершенности исследования и естественности полученных результатов. Доказательства при этом могут быть достаточно объемными и сложными.

Данная диссертационная работа представляет из себя фундаментальное исследование. Результаты представлены четко. Решенные задачи были трудными, но автор с ними успешно справился. Нет сомнения в актуальности, новизне и высокой ценности полученных результатов. Их представление полное и законченное.

Структура диссертационной работы следующая: выделено 28 глав, разбитых на группы, каждая из которых посвящена определенной теме. В каждой группе определены основные полученные результаты. Даны их доказательства. Приведем основные результаты, представленные к защите.

1. Аналог теоремы Минеева-Фридмана для почти свободных групп.
2. Единое обобщение теоремы Фробениуса о числе решений уравнения $x^n = 1$ в группе, Соломона о числе решений в группе системы уравнений и Ивасаки о корнях из подгрупп.

3. Доказательство свойства вербальной замкнутости для почти свободных и некоторых других групп.

4. Обобщение теоремы Макаренко-Хухро.

5. Доказательство неулучшаемости оценки Каллера для свободных произведений групп без кручения.

6. Полное решение задачи о сбалансированных разложениях на множители в конечных полях.

7. Построение финитно аппроксимируемого "монстра Дена", обладающего рядом особенных свойств.

8. Доказательство шпехтовости аддитивной бинарной арифметики.

9. Теорема об "экономном" присоединении квадратных корней к группам.

10. Доказательство того, что из непростой группы без кручения нельзя получить неабелеву простую группу путем добавления одного образующего и одного соотношения.

11. Описание автоморфизмов присоединенной группы Шевалле ранга большего единицы над $\mathbb{Q}$-алгеброй.

12. Пример бесконечной счетной нетопологизируемой группы без кручения.

Комментарии:

1. Теорема Минеева–Фридмана, подтвердившая хорошо известную гипотезу Х. Нейман, дает неулучшаемую оценку для ранга пересечения двух подгрупп свободной группы. Получен ее аналог для почти свободной группы: если A и B – нетривиальные свободные подгруппы группы, содержащей свободную подгруппу индекса n, то выполнено неравенство rank $(A \cap B)$-1)$\leq n\cdot$(rank(A) - 1)$\cdot$ rank(B) - 1). При $n = 1$ это теорема Минеева-Фридмана. Вопросами оценки рангов такого сорта занимались многие авторы, в том числе сама Х. Нейман, получившая для свободной группы оценку с дополнительным множителем 2 в правой части.

2. Очень интересный подход, позволивший в едином ключе описать и усилить многочисленные оценки и утверждения, начиная со знаменитого результата Фробениуса о том, что число решений уравнения $x^n = 1$ в конечной группе G делится на нод $(|G|, n)$.

3. Понятие вербально замкнутости подгруппы в группе введено в рассмотрение в работе А.Г. Мясникова и автора этих строк в 2014 году. Авторы этой работы доказали, что всякая вербально замкнутая подгруппа конечно порожденной свободной группы является ретрактом. Это было неожиданно, так как свойство вербальной замкнутости является формально гораздо более слабым, чем свойство алгебраической замкнутости. Однако диссертант совместно с его учеником А.М. Мажугой нашли еще более неожиданное свойство для группы, названное сильной вербальной замкнутостью, а именно: быть ретрактом в любой группе, в которой эта группа является вербально замкнутой подгруппой. Они в частности установили, что свойством сильной вербальной замкнутости обладают все свободные (и многие почти свободные) группы. Диссертантом и его учениками получен еще ряд результатов по этому направлению. В одной из публикаций принял участие руководитель диссертанта по кандидатской диссертации А.Ю. Ольшанский, что говорит о трех поколениях математиков, с успехом проявляющих интерес к данным вопросам.

4. В диссертации представлено упрощенное доказательство и обобщение теоремы Макаренко–Хухро о больших автоморфно допустимых подгруппах с тождеством. Теорема Макаренко-Хухро утверждает, что если в группе есть подгруппа конечного индекса, удовлетворяющая внешнему коммутаторному тождеству, то в этой группе найдется автоморфно допустимая подгруппа конечного индекса, удовлетворяющая этому тождеству. Представленный в диссертации результат можно рассматривать как дуальное утверждение. Установлено, что для любой конечной нормальной подгруппы N произвольной группы G ограниченной экспоненты существует автоморфно допустимая конечная подгруппа H группы G такая, что множество порядков элементов (спектр) фактор-группы G/H содержится в спектре группы G/N.

5. Доказан ряд результатов о возможности представлений элементов группы в виде произведения коммутаторов. Приводятся оценки числа множителей в таких представлениях.

6. Интересный результат, лежащий в стороне от основной тематики диссертации.

7. "Монстром Дена" называется конечно порожденная рекурсивно определенная бесконечная алгоритмически конечная группа. Последнее свойство означает отсутствие алгоритма, выписывающего бесконечное количество попарно различных элементов этой группы. Основополагающей является статья А.Г. Мясникова и Д.В. Осина 2011 года, в которой были построены примеры таких групп. В диссертационной работе построена такая группа с дополнительным условием финитной аппроксимируемости, что отвечает на вопрос из указанной работы. Представлен ряд необычных свойств построенной группы.

8. На кольце вычетов вида $\mathbb{Z}_{2^k}$ рассматривается операция сложения по модулю 2^k (сложение в кольце) и операция сложения по модулю 2 (XOR). Дается описание всех функций выражающихся через эти две. Также доказано, что многообразие порожденное алгеброй $\mathbb{Z}_{2^k}$ с этими двумя операциями конечно базируемо. Интересное исследование имеющее значение для компьютерных наук.

9. Известно, что каждая конечная группа G вложима в конечную группу порядка $2|G|^2$, в которой все элементы группы G являются квадратами. Доказано, что что существует бесконечно много попарно неизоморфных конечных групп G_i таких, что для некоторого $g_i \in G_i$ группа, содержащая G_i, в которой элемент g_i имеет квадратный корень, имеет порядок не меньше чем $|G_i|^2$.

10. Известно, что утверждение согласно которому из непростой группы нельзя получить неабелеву простую группу путем добавления одного образующего и одного определяющего соотношения эквивалентно хорошо известной гипотезе Кервера-Лауденбаха. Доказано его справедливость для групп без кручения. Это является одним из центральных результатов по указанной гипотезе.

11. Автоморфизм присоединенной группы Шевалле называется стандартным (в смысле А.Е. Залесского), если он индуцирован автоморфизмом соответствующей алгебры Ли. Это понятие используется для описания автоморфизмов групп Шевалле ранга большего единицы над любыми коммутативными алгебрами над полем рациональных чисел.

12. Установлено, существование конечно порожденной группы без кручения и уравнения от одной переменной над этой группой, что решениями этого уравнения являются все неединичные элементы этой группы, в то время как единица не является решением. Отсюда вытекает существование нетривиальной счетной нетопологизируемой группы без кручения (ответ на вопрос П.И. Кирку). Диссертанту принадлежит еще ряд результатов по топологизируемости, не вошедших в диссертационную работу. Группа называется наследственно нетопологизируемой, если никакая ее секция (фактор-группа подгруппы) не допускает недискретной отделимой групповой топологии. Построены первые примеры бесконечных наследственно нетопологизируемых групп. Даны ответы на несколько вопросов Д. Дикраняна и В.В. Успенского. Предложен метод построения топологизируемых групп, основанный на генерических свойствах в пространстве помеченных k-порожденных групп. Построена недискретная квазициклическая топологическая группа конечного периода, что отвечает на вопрос на вопрос С.А. Морриса и В.Н. Образцова.

Тематика диссертации чрезвычайно разнообразна. Она затрагивает как классические области с традиционными вопросами, так и новые направления исследований с неожиданной постановкой вопросов и соответственно неожиданными результатами. Автор обладает исчерпывающей информацией о работах в данной области исследований. Автор показал себя как первооткрыватель и в то же время как математик способный к упрощениям доказательств и глубокому обобщению известных результатов. Его методы и подходы разнообразны. Они включают комбинаторные рассмотрения, в том числе богатую геометрическую технику, развитую А.Ю. Ольшанским и его учениками, диаграммы Хауи, технику теории графов, собственную оригинальную технику исследования разрешимости уравнений в группах и т.п. Диссертационная работа написана чрезвычайно интересно. В то же время при большом объеме материала она компактна и читается сравнительно легко.

Каких-то недостатков (даже опечаток) я не заметил. Впрочем, к неточностям можно отнести различные сокращения названия одного и того же журнала в библиографии (см., например, [Маж19] и [Маль40], [Зел85] и [Ло86]). Возможно, что не стоило включать в список результатов представляемых к защите, утверждение под номером 6 о сбалансированных разложениях на множители в конечных полях. Это утверждение, конечно, интересное, но оно несколько выпадает из тематики диссертации. Ведь в основном она посвящена теории групп. А вот утверждение 8 о шпехтовости некоторой естественной алгебры, представляющей интерес для компьютерных наук, по моему мнению на своем месте в диссертационной работе. Хотя оно также не по группам.

Результаты диссертационной работы хорошо известны. Они многократно докладывались на крупных международных конференциях. Нельзя не отметить оригинальный мастерски сделанный сайт А.А. Клячко, в котором можно быстро и легко найти опубликованные им статьи и полученные результаты, получить сведения о многочисленных его учениках и их научных достижениях, а также другую информацию. Результаты полностью отражены в публикациях автора, приведенных в диссертационной работе.

Нет сомнения в том, что диссертационная работа А.А. Клячко "Уравнения в группах и смежные вопросы" написана им лично и самостоятельно. Многие работы написаны в соавторстве (в основном это совместные работы с учениками), что полно отражено в диссертации. Автореферат представляет основные результаты диссертации и полностью ей соответствует.

Заключение.

Диссертационная работа Клячко Антона Александровича "Уравнения в группах и смежные вопросы" удовлетворяет критериям, определенным в пп. 2.1–2.5 "Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова", предъявляемым к докторским диссертациям, соответствует специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 –математическая логика, алгебра и теория чисел). Считаю, что ее автор – Клячко Антон Александрович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент:
д.ф.-м. н. профессор Виталий Анатольевич Романьков
Должность: главный научный сотрудник.
Научная специальность: 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Организация: Омский филиал ФГБУН "Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН".
Почтовый адрес: 644043, г. Омск, ул. Певцова, 13.
Интернет-сайт: http://www.ofim.oscsbras.ru/
Телефон: (8-381-2) 23-65-67 (директор)

подпись В.А. Романькова
удостоверяю
зам. директора по НР
/Гребер. 21.07.22