

Основы актуарной и финансовой математики

(актуарная группа; 5-6 семестры)

годовой обязательный спец. курс для студентов 3 курса

лектор: д.ф.м.н., проф. Г.И.Фалин

Примеры задач

Задача (CM1A, 11 April 2019, Question 7). Человек покупает в страховой компании ренту за разовую премию. Рента будет выплачивать £10,000 в конце каждого года на протяжении 15 лет. Страховая компания инвестирует премию в облигацию, которая платит купон раз в год по ставке 6% годовых и будет погашена по номиналу ровно через девять лет.

(i) (a) Вычислите средний дисконтированный срок выплат для ренты при годовой эффективной процентной ставке 5%.

(b) Вычислите средний дисконтированный срок выплат для облигации при годовой эффективной процентной ставке 5%.

(ii) Объясните, получит страховая компания прибыль или понесёт убытки, если процентные ставки слегка уменьшатся для всех сроков.

Задача (CM1A, 21 September 2020, Question 5). Компания в настоящий момент инвестирует \$50,000 и на протяжении следующих 12 лет будет получать следующий доход:

- 1) на протяжении первых четырёх лет: \$4,000 в год, которые будут поступать равными долями в конце каждого трёхмесячного промежутка;
- 2) в течение второго четырёхлетнего промежутка времени: X долларов в год, которые будут поступать равными долями в конце каждого шестимесячного промежутка;
- 3) на протяжении последних четырёх лет: \$12,000 в год, которые будут поступать непрерывно с постоянной скоростью.

Никаких других платежей этот инвестиционный проект не предполагает.

Вычислите X , предполагая, что компания обеспечила себе номинальную доходность 9% годовых, начисляемых ежемесячно.

Задача (CM1A, 24 September 2019, Question 10). Интенсивность процентов, $\delta(t)$, является функцией времени и в момент t , измеренный годами, даётся формулой:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.03 + 0.01t, & 0 \leq t < 4, \\ 0.07, & 4 \leq t < 6, \\ 0.09, & t \geq 6. \end{cases}$$

(i) Сумма 10 была инвестирована в момент $t = 0$. Вычислите накопление к моменту $t = 6$.

(ii) Вычислите стоимость в момент $t = 0$ отложенной на 4 года непрерывной ренты, которая платит деньги со скоростью 5 на протяжении шести лет.

(iii) Определите, с точностью до 0.1%, постоянную эффективную годовую ставку дохода для инвестора, который инвестирует в момент $t=0$ сумму, вычисленную в пункте (ii), а в обмен получает денежный поток, описанный в пункте (ii).

Задача (CM1A, 11 April 2019, Question 12). 1 января 2016 года был выдан заём на сумму £80,000. Он должен быть погашен за 10 лет постоянными ежемесячными платежами 1 числа каждого последующего месяца (вплоть до 1 января 2026 года включительно).

(i) Вычислите размер этого постоянного ежемесячного платежа используя годовую эффективную процентную ставку 8%.

(ii) Вычислите размер непогашенной задолженности 1 ноября 2018 года (немедленно после того, как произведён очередной платёж в соответствии с установленным расписанием).

1 ноября 2018, немедленно после платежа очередной суммы в счёт погашения долга, заёмщик попросил уменьшить размер ежемесячной выплаты до £900 и продлить промежуток времени, оставшийся до погашения долга (чтобы непогашенную задолженность можно было полностью оплатить уменьшенными ежемесячными платежами). Последний платёж должен быть равен размеру оставшейся задолженности, если она меньше, чем £900.

Кредитор согласился с этими изменениями при следующих дополнительных условиях:

- в будущем будет применяться годовая процентная ставка 9%, начисляемая ежемесячно;
- к непогашенному долгу по состоянию на 1 ноября 2018 года добавляется сбор за оформление документов в размере £250.

(iii) (a) Определите новую дату погашения долга.

(b) Вычислите размер последней выплаты по долгу.

Задача (CM1A, 21 September 2020, Question 8) Заём, выданный под 5% годовых, должен быть погашен за 16 лет серией выплат, производимых в конце каждого года (считая от момента получения суммы займа). Первая выплата равна \$200, а каждая последующая больше предыдущей на \$15.

(i) Вычислите сумму займа.

(ii) Постройте расписание выплаты долга, которое для 5-й и 6-й выплат показывает:

- какая сумма идёт на погашение долга,
- какая сумма идёт на выплату процентов, набравших за истекший год,
- размер оставшейся задолженности непосредственно после выплаты.

(iii) Для последней выплаты вычислите, сколько пошло на погашение основной суммы долга, а сколько — на уплату процентов.

Задача (CM1A, 12 April 2021, Question 8) Студент планирует 1 января 2022 года занять в банке \$15,000 на 10 лет. С соответствии с расписанием возврата долга студент будет производить выплаты в конце каждого месяца на протяжении этого десятилетнего срока. Первый платёж (в конце января 2022 года) будет X , второй платёж (в конце февраля 2022 года) будет $2X$ и т.д., пока в конце декабря 2026 года он не выплатит сумму $60X$. Оставшиеся платежи, начиная с конца января 2027 года, будут $60X$. На невыплаченную часть кредита банк начисляет проценты по эффективной годовой ставке 12%.

- (i) Выпишите уравнение ценности для вычисления X .
- (ii) Вычислите X , используя уравнение ценности из пункта (i).
- (iii) Используя ретроспективный метод, выпишите формулу для вычисления невыплаченной суммы займа после выплаты в конце декабря 2026 года.
- (iv) Используя формулу из пункта (iii), вычислите размер невыплаченной суммы займа после выплаты в конце декабря 2026 года.
- (v) Прокомментируйте ваш ответ на вопрос из пункта (iv).
- (vi) Выпишите уравнение для вычисления общей суммы процентов, выплаченных на протяжении 2027 года.
- (vii) Вычислите общую сумму процентов, выплаченных на протяжении 2027 года, используя уравнение из пункта (vi).

Банк также предлагает десятилетний заём под те же проценты, по условиям которого ежемесячные выплаты постоянны на протяжении всего срока займа.

(viii) Будет ли общая сумма процентов, выплаченных студентом по этому новому плану, больше или меньше, чем общая сумма процентов, выплаченных студентом по исходному расписанию возврата долга. Вы не должны производить никаких дополнительных вычислений.

Задача (CM1A, 21 September 2020, Question 6) Инвестиционный банк занял 39.5 миллионов долларов под 8% годовых. Эти деньги банк инвестировал в проект, который будет протяжении 15 лет ежегодно приносить 5 миллионов долларов, поступающих равными долями через каждые три месяца. Эти поступления используются для погашения долга, а после его погашения банк сможет зарабатывать на полученные деньги 6% годовых.

- (i) Вычислите дисконтированный период окупаемости проекта.
- (ii) Вычислите сумму, которую удастся накопить банку к концу 15-го года.

Задача (CM1A, 12 April 2021, Question 3) 1 марта 2017 года была выпущена ценная бумага с фиксированной доходностью, номинальная стоимость которой равна \$100,000. Эта бумага была погашена по номиналу 1 марта 2020 года. Купоны выплачивались раз в год по ставке 4% годовых.

Данные об инфляции за этот промежуток времени приведены в таблице.

Дата	1.03.17	1.03.18	1.03.19	1.03.20
Индекс инфляции	240.5	256.0	272.8	286.6

(i) Покажите, что реальная годовая доходность к погашению отрицательна и равна приблизительно -1.9% .

(ii) Прокомментируйте результат (i).

Задача (CM1A, 12 April 2021, Question 9) Компания «Зелёные инвестиции» имеет возможность приобрести некую фабрику за \$400,000 с тем, чтобы после покупки сразу же сдать эту фабрику в аренду. Две компании, А и В, готовы арендовать фабрику и подали следующие заявки.

Компания А.

Эта компания готова арендовать фабрику на 20 лет, если компания «Зелёные инвестиции» модернизирует фабрику, потратив на это ещё \$50,000. Арендную плату компания А будет вносить в начале каждого года (за первый год плата будет внесена немедленно после заключения договора), причём эта плата каждый год будет увеличиваться на 3%. В конце срока аренды компания А купит фабрику у компании «Зелёные инвестиции» за \$450,000.

Компания В.

Эта компания также готова арендовать фабрику на 20 лет. В течение первых десяти лет арендная плата составит \$44,600 в год, которые будут выплачиваться равными частями в начале каждого месяца, начиная с момента заключения договора. В конце десятого года аренда вырастет на 50% и останется на этом уровне на протяжении последующих десяти лет. Платежи также будут производиться равными частями в начале каждого месяца. В конце срока аренды фабрика перейдёт в собственность компании В без дополнительной оплаты.

(i) Какую арендную плату за первый год должна выплатить компания А, чтобы её предложение означало для компании «Зелёные инвестиции» внутреннюю ставку дохода 9% годовых.

(ii) Покажите, что предложение компании В обеспечит компании «Зелёные инвестиции» внутреннюю ставку дохода больше, чем 9% годовых.

Компания «Зелёные инвестиции» не имеет собственных средств для покупки фабрики, но может занять деньги по ставке 9.5% годовых. Этот заём должен быть выплачен за 20 лет выплатой в конце каждого года фиксированной суммы. Компания «Зелёные инвестиции» решает принять предложение компании В, а для покупки фабрики берёт деньги в долг.

(iii) Вычислите накопление к концу 20-го года для этого проекта, используя эффективную годовую процентную ставку 9.5%.

Задача (CM1A, 11 April 2019, Question 11) 1 февраля 2017 года инвестор обдумывал покупку обычных акций некоторой компании. Дивиденды выплачиваются раз в год, 1 февраля, и только что были выплачены дивиденды в размере £0.40 на акцию. В момент покупки акции ожидалось, что дивиденды будут ежегодно возрастать: на 5% за первый год, на 4% за второй, на 3% за третий и последующие годы. Инвестор не имел права на получение только что выплаченных дивидендов.

(i) Вычислите максимальную цену, которую мог бы заплатить за акцию инвестор, если он предполагает держать акцию бессрочно и рассчитывает на эффективную годовую доходность от этой операции в размере 9%.

Инвестор купил пакет акций 1 февраля 2017 года по цене £7.00 за акцию и продал его 1 октября 2019 года, немедленно после получения причитающихся ему дивидендов, по цене £7.50 за акцию.

(ii) Вычислите эффективную годовую доходность этой операции для инвестора, используя следующую информацию:

Дата	Индекс инфляции	Дивиденды на одну акцию
1 февраля 2017	211.0	£0.400
1 февраля 2018	215.7	£0.428
1 февраля 2019	221.2	£0.449

Задача (CM1A, 24 September 2019, Question 6) Эффективная годовая форвардная ставка для промежутка времени $[t; t+r]$, где t и r измеряются годами, обозначена $f_{t,r}$ (иначе говоря, $f_{t,r}$ – это r -летняя форвардная ставка через t лет). Известно, что $f_{0,1} = 4\%$, $f_{1,1} = 5\%$, $f_{2,1} = 6\%$, $f_{3,1} = 7\%$.

(i) Определите доходность к погашению в момент эмиссии для четырёхлетней облигации, которая гасится по номиналу и платит купон по ставке 4% в конце каждого года.

(ii) Объясните, почему эта доходность меньше, чем $f_{3,1}$.

Задача (CM1A, 24 September 2019, Question 8). Компания только что выпустила облигации, которые платят купон каждые полгода по ставке 9%. Общая номинальная стоимость выпуска равна £1,000,000. Облигации должны быть погашены в любой купонный момент в промежутке между 20 и 25 годами (включительно) с даты эмиссии с выплатой £110 за £100 номинала. Дату погашения определяет владелец облигации.

Инвестор, который обязан платить 15% подоходный налог, но свободен от уплаты налога на прирост капитала, желает купить весь выпуск в день эмиссии.

(i) Вычислите, при какой цене покупки инвестор обеспечит себе чистую эффективную годовую доходность не меньше 8%. [5]

Инвестор приобретает весь выпуск по цене, вычисленной в п. (9). Ровно через 10 лет, сразу же после выплаты купона, второй инвестор, который обязан платить 25% подоходный налог и 35% налог на прирост капитала, по цене, которая обеспечила первому чистую эффективную годовую доходность 8%. Второй инвестор держит облигации до погашения.

(ii) Вычислите:

(a) цену, уплаченную вторым инвестором;

(a) минимальную чистую доходность к погашению для второго инвестора (с точностью до 0.1% годовых).

Задача (CM1A, 11 April 2019, Question 1) Дайте определение величины ${}_{10|4}q_{[27]+2}$ словами.

Задача (CM1A, 11 April 2019, Question 2). Вычислите ${}_{2.75}q_{84.5}$ используя метод равномерного распределения смертей. База расчётов: ELT15 (Females).

Задача (CM1A, 21 September 2020, Question 2). Вычислите, используя где необходимо обычные приближения, величины:

(a) ${}_{10|4}q_{[36]}$;

(b) $\bar{A}_{46:\overline{25}|}^1$

Актuarные предположения: смертность – AM92, процентная ставка – 4% годовых.

Задача (CM1A, 24 September 2019, Question 3) (i) Объясните значение выражения ${}_{5|17}q_{40:40}^1$.

Остаточные времена жизни двух человек, в возрасте 40 лет каждый, независимы друг от друга. Для каждого из них интенсивность смертности постоянна и равна 0.01.

(ii) Вычислите значение выражения из части (i).

Задача (CM1A, 12 April 2021, Question 1). Вычислите величину ${}_{3|5}q_{45:45}^1$ предполагая, что остаточные времена жизни обоих человек являются независимыми случайными величинами, а их распределение описывается таблицей AM92.

Задача (CM1A, 12 April 2021, Question 5) Интенсивность смертности в некоторой популяции, μ_x^* , для всех возрастов x (где x не обязательно является целым числом) на 20% выше, чем интенсивность смертности, соответствующая таблице РМА92С20. Для этой популяции вычислите следующие величины, используя для дисконтирования эффективную годовую процентную ставку 7%: (i) $\ddot{a}_{70:\overline{3}|}$; (ii) $A_{70:\overline{3}|}$.

Задача (CM1A, 12 April 2021, Question 6) Страховая компания заключила специальный договор пожизненного страхования с человеком, возраст которого в момент заключения договора ровно 45 лет. В соответствии с этим договором страховщик выплачивает \$40,000 в случае смерти застрахованного в течение первых 15 лет действия договора и \$50,000 в случае смерти после этого срока. Выплаты производятся в конце года смерти.

(i) Вычислите среднее значение текущей стоимости страховой выплаты.

(ii) Вычислите дисперсию текущей стоимости страховой выплаты.

Основа расчётов: Смертность – AM92 (предельная). Процентная ставка – 6% годовых.

Задача (CM1A, 11 April 2019, Question 4). В страховой компании застрахована семейная пара, причём страхователем является жена. Договор страхования гарантирует:

- выплату страхователю пожизненной ренты в размере £15,000 в год равными частями в начале каждого месяца после того, как ей исполнится 65 лет;
- выплату супругу пожизненной ренты в размере £8,000 в год равными частями в начале каждого месяца после смерти страхователя, но только при условии, что страхователь дожил до 65 лет (и потому начались выплаты первой ренты).

Если страхователь не доживёт до 65 лет, никакие выплаты по этому договору не производятся.

Рассчитайте разовую нетто-премию, если в момент заключения договора возраст жены ровно 50 лет, а мужа – ровно 53 года.

Техническая основа расчётов: PFA92C20 для женщин, PMA92C20 для мужчин, актуарная процентная ставка 4% годовых. Расходы игнорируйте.

Задача (CM1A, 11 April 2019, Question 6). Страховая компания предлагает договор страхования жизни на 20 лет с дополнительной выплатой в случае инвалидности. По условиям договора:

- в случае смерти, вне зависимости от того, была перед этим назначена инвалидность или нет, немедленно выплачивается страховая сумма £150,000;
- при назначении инвалидности немедленно выплачивается страховая сумма £75,000.

(i) Изобразите графически модель этого договора в виде диаграммы переходов из состояния в состояние, указав все необходимые метки.

(ii) Вычислите общую ожидаемую текущую стоимость этих выплат.

Актуарные предположения: интенсивность смертности для здорового человека 0.03 для всех возрастов, интенсивность смертности для инвалида 0.08 для всех возрастов, интенсивность перехода в состояние инвалидности 0.001 для всех возрастов, для дисконтирования используйте интенсивность процентов 5% годовых.

Задача (CT5, 6 April 2005, Question 1) Объясните разницу между вектором дохода и характеристикой дохода.

Задача (CT5, 22 September 2008, Question 2) Характеристика дохода для трёхлетнего договора страхования жизни, заключённого с мужчиной в возрасте ровно 57 лет, есть $(-250, 150, 200)$. Найдите маржу прибыли по этому договору, если периодическая премия, которая платится в начале каждого года действия договора, равна £500.

При расчётах предполагайте, что расторжение договора невозможно, и используйте ставку дисконтирования $r = 12\%$ и таблицу AM92 (Ultimate), фрагмент которой приведён ниже:

Age, x	57	58	59
q_x	0.005650	0.006352	0.007140

Задача (CT5, 27 April 2015, Question 6). Человек, возраст которого ровно 55 лет, заключает договор страхования на три года со страховой суммой £150,000, которая выплачивается в конце года смерти (если она наступит во время действия договора). На заключение и поддержание договора страховщик тратит: £260 в момент заключения договора, £70 в начале второго и третьего года (если застрахованный ещё жив в этот момент). Премия в размере £900 выплачивается в начале каждого года действия договора (пока застрахованный жив).

Вычислите ожидаемые потери или прибыль для страховщика по этому договору на момент его заключения.

При расчётах используйте одну и ту же процентную ставку 3% для дисконтирования и вычисления инвестиционного дохода и таблицу AM92 (Select), фрагмент которой приведён ниже:

Age, x	Duration 0 $q_{[x]}$	Duration 1 $q_{[x-1]+1}$	Durations 2+ $q_{[x-k]+k} \equiv q_x$
55	0.003358	0.004363	0.004469
56	0.003742	0.004903	0.005025
57	0.004171	0.005507	0.005650

Задача (CT5, 22 September 2008, Question 6). Мужчина в возрасте 62 года покупает договор смешанного страхования на три года на следующих условиях:

1. если он доживает до конца срока действия договора, то ему выплачивается £100,000;
2. если он умирает во время действия договора, то эта сумма выплачивается в следующую годовщину договора;
3. премия в размере £30,000 выплачивается в начале каждого года действия договора.

Вычислите ожидаемый доход или убыток страховщика по этому договору, используя следующий тарифный базис:

1. процентная ставка одна и та же как для дисконтирования, так и для вычисления инвестиционного дохода : 7.5% годовых;
2. смертность: $q_{[x-t]+t} = \frac{1}{4-t} q_x$ для всех x и $t = 0, 1$ или 2 , где $q_{62} = 0.018$, $q_{63} = 0.02$, $q_{64} = 0.022$;
3. расходы игнорируйте.

Задача (CT5, 26 April 2010, Question 4) Страховая компания предлагает на рынке договоры временного страхования с возрастающей страховой суммой, которая выплачивается в конце года смерти. На первый год страховая сумма равна \$10,000, а

затем ежегодно она увеличивается на \$100. Вычислите разовую премию по договору, который заключается на 5 лет с человеком в возрасте 50 лет, используя принцип эквивалентности обязательств. Расходы не учитывайте.

При расчётах используйте одну и ту же процентную ставку 4% как для дисконтирования, так и для вычисления инвестиционного дохода, и таблицу AM92 (Select), фрагмент которой приведён ниже:

Age x	Duration 0 $q_{[x]}$	Duration 1 $q_{[x-1]+1}$	Durations 2+ $q_{[x-k]+k} \equiv q_x$
50	0.001971	0.002434	0.002508
51	0.002189	0.002732	0.002809
52	0.002433	0.003070	0.003152
53	0.002707	0.003452	0.003539
54	0.003014	0.003881	0.003976

Задача (CM1, 21 September 2020, Question 10) Страховая компания разработала новый страховой продукт – договор смешанного страхования на три года с участием страхователя в прибыли. Участие в прибыли обеспечивается увеличением страховой суммы на некоторый постоянный процент в конце каждого года действия договора при условии дожития застрахованного до этого дня (составной бонус). Кроме того, при дожитии застрахованного до конца срока действия договора увеличенная страховая сумма увеличивается ещё раз на некоторый процент (конечный бонус). Если застрахованный умирает во время действия договора, увеличенная страховая сумма выплачивается в конце года смерти. Если застрахованный доживает до конца срока действия договора, ему выплачивается увеличенная страховая сумма, учитывающая начисленный составной бонус и конечный бонус.

Премии платятся в начале каждого года действия договора (т.е. пока застрахованный жив, но не более трёх лет).

Используя дисконтирование предполагаемого денежного потока, вычислите премию для договора со страховой суммой \$15,000, заключённого с 62-летним мужчиной, при которой приведённая ожидаемая прибыль страховщика равна 0.

Актuarные предположения для тестирования прибыли

Доходность от вложения средств страховщика: 2% годовых

Смертность: 120% от AM92 Ultimate, фрагмент которой приведён ниже:

Age, x	62	63	64
q_x	0.010112	0.011344	0.012716

Начальные расходы (в начале первого года): \$200

Возобновляемые расходы: \$30 при получении второй и третьей премий

Первоначальная комиссия: 15% от первой премии

Возобновляемая комиссия: 1.5% от второй и третьей премий

Расходы на администрирование страховых выплат после наступлении страховых случаев: \$50 (как для выплат по риску «смерть», так и для выплат по дожитию)

Составной бонус: 2% в год

Конечный бонус: 10% от основной страховой суммы и начисленного составного бонуса. Он платится только при дожитии застрахованного до конца срока действия договора.

Ставка дисконтирования: 7% годовых

Резервы: игнорируйте

Расторжение договоров: игнорируйте

Задача Страховщик учитывает аквизиционные расходы E_0 как отрицательный «доход» в момент заключения договора и в результате тестирования прибыли по пятилетнему договору страхования жизни получил следующий вектор дохода $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$: $(-500, 200, 180, 150, 120, 100)$, k -я компонента которого для $k = 1, 2, \dots, 5$ – это условный ожидаемый доход за k -й год действия договора (при условии, что договор действовал в начале этого года), а $\pi_0 = -E_0$. Вероятность $q_{[x]}$ смерти застрахованного на протяжении первого года действия договора равна 0.010, а затем каждый год эта вероятность увеличивается на 0.001 (т.е. $q_{[x]+k} = q_{[x]+k-1} + 0.001$ для $k \geq 1$). Вычислите:

1. характеристику дохода;
2. ожидаемый доход по договору в момент его заключения, если ставка дисконтирования равна 15% годовых;
3. ожидаемый доход по договору в момент его заключения, если ставка дисконтирования равна 20% годовых;
4. внутреннюю ставку дохода для этого договора.

Задача (CT5, 23 April 2012, Question 2) Договор страхования жизни в случае смерти застрахованного гарантирует выплату в конце года смерти всех внесённых премий без процентов. Постоянная премия в размере £3,000 платится в начале каждого года действия договора. Известно, что для 12-го года действия договора:

- резерв в начале этого года равен £25,130,
- резерв в конце этого года равен £28,950,
- вероятность смерти застрахованного на протяжении этого года равна 0.03,
- расходы страховщика в начале года равны £90,
- на резервы страховщик зарабатывает 4% годовых.

Все упомянутые выше резервы вычислены непосредственно перед выплатой очередной премии.

Для договора, который действовал в начале этого года, вычислите ожидаемый доход (или потери) страховщика к концу года