Лукашенко А.Т.[1], Веселовский И.С.[1,2],

[1] *Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ, Москва*
[2] *Институт космических исследований РАН, Москва*

Геометрические свойства окрестностей особых точек потенциального магнитного поля

Ломоносовские чтения – 2017
24.04.17

Нулевые точки магнитного поля

Поместим начало координат в нулевую точку (**B**=0). Компоненты вектора магнитного поля можно разложить вблизи неё в ряд Тейлора:

$$B_i = \left.\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{R}=0} x_j + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j \partial x_k}\right|_{\mathbf{R}=0} x_j x_k + \ldots$$

Нулевой точкой 1-го порядка будем называть такую нулевую точку, в окрестности которой по крайней мере один из членов разложения 1-го порядка по крайней мере одной из компонент поля отличен от нуля

И аналогично с порядками выше 1-го

Потенциальное поле:

$$\mathbf{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla U \qquad \Delta U = 0$$

Разложение потенциала в ряд Тейлора:

$$U = \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j x_k + \ldots$$

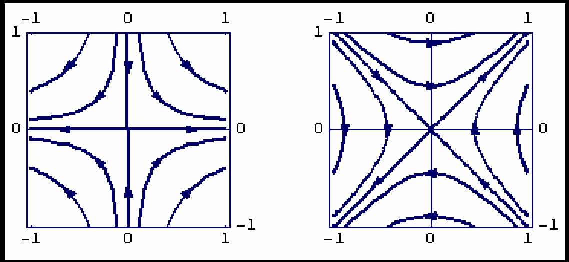
- Классификация нулевых точек 1-го порядка дана Parnell et al. [1]
- Обзор для нулевых точек высших порядков в 3D, заданных отдельными шаровыми функциями, дан Жугждой [2]
- В общем случае разложение потенциала в ряд вблизи нулевой точки представляет собой линейную комбинацию сферических гармоник, число которых для нуля порядка *p* равно 2*p*+3

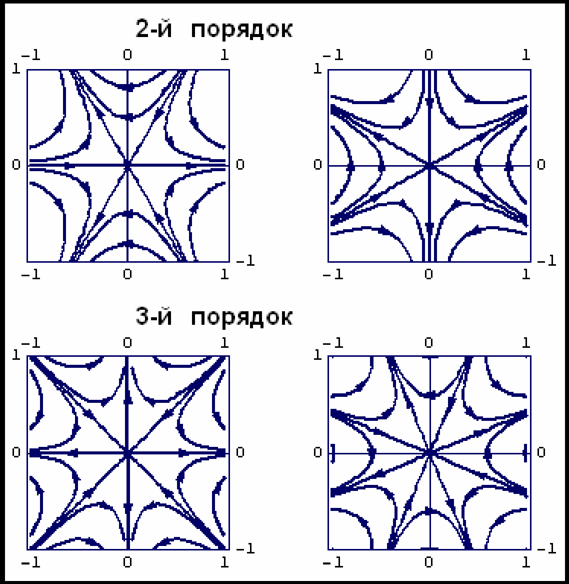
[1] *Parnell C.E., Smith J.M., Neukirch T., Priest E.R.* The structure of three-dimensional magnetic neutral points // Phys. Plasmas. V. 3. № 3. P. 759–770. 1996

[2] *Жугжда Ю.Д.* Нейтральные (нулевые) точки магнитных полей // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 6. № 3. С. 506–511. 1966

Классификация

- 2D нулевые точки:
  - 1-й порядок
  - высшие порядки
- 3D нулевые точки:
  - 1-й порядок:
    - невырожденные
    - вырожденные
  - 2-й порядок:
    - нулевые точки 2-го порядка общего вида
    - нулевые точки 2-го порядка с дополнительным вырождением
  - …





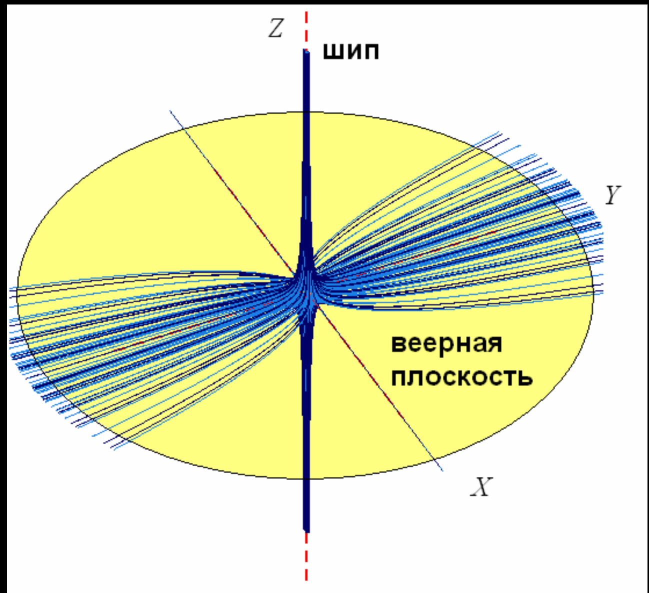
Нулевые точки 1-го порядка в 3D

$$\mathbf{B} = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- Классификация нулевых точек 1-го порядка в 3-мерном пространстве производится по совокупности собственных значений матрицы вторых производных потенциала *M*

- Вырожденными (неустойчивыми к малым возмущениям) при этом являются случаи, возникающие при равенстве каких-либо из собственных значений нулю или друг другу

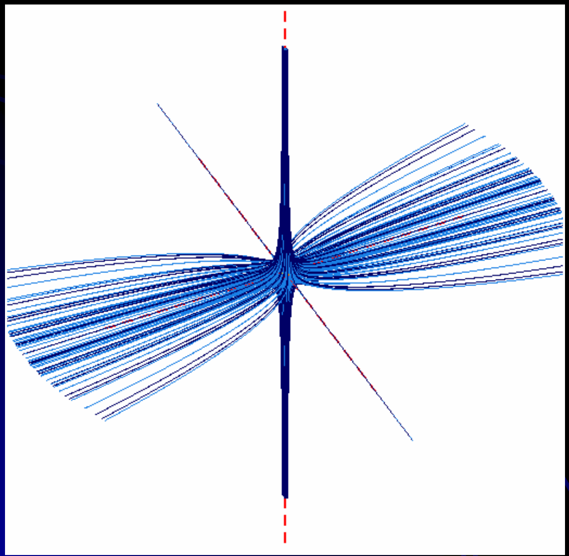
- Если в двумерном случае все нулевые точки в низшем порядке разложения имели фиксированную геометрию ближайших окрестностей, с точностью до поворота и масштабного фактора, то в трёхмерном пространстве возможны разные варианты геометрии окрестностей точек одного порядка и вырождение как по порядку нелинейности, так и геометрическое (возникновение дополнительных симметрий)

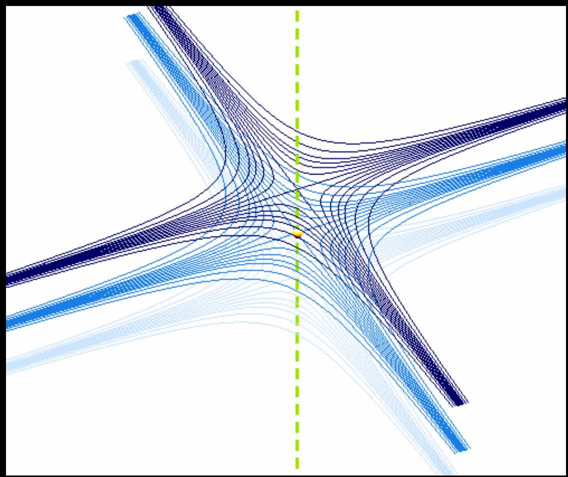


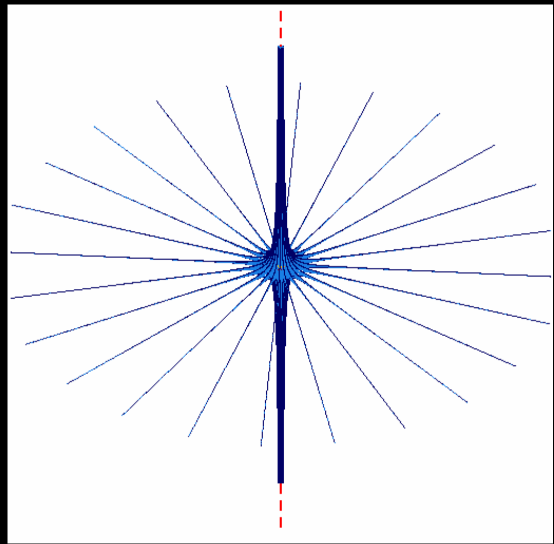
Разновидности нулевых точек 1-го порядка

Нулевые точки 1-го порядка

- $\lambda_i \neq 0$ и различны (i = 1,2,3)
  Невырожд. нулевая точка
  - $\lambda_i < 0$ (i = 1,2), $\lambda_3 > 0$
    тип *A*
    (– – +)
  - $\lambda_i > 0$ (i = 1,2), $\lambda_3 < 0$
    тип *B*
    (+ + –)
- $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = 0$
  Трансляционная симметрия
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = -2\lambda$
  Аксиальная симметрия
  - $\lambda < 0$
    тип *A*
    (– – +)
  - $\lambda > 0$
    тип *B*
    (+ + –)







Нулевые точки порядка выше 1-го

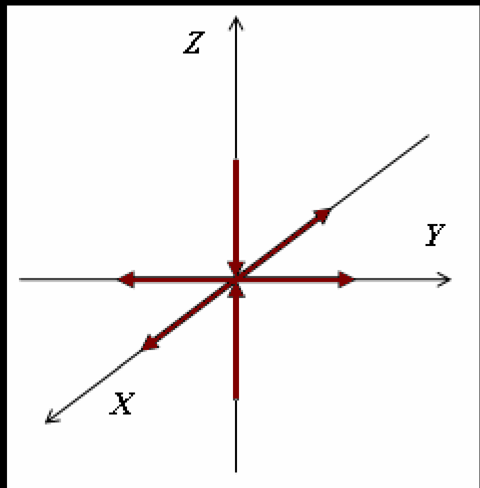
- Описание нулевых точек порядка выше 1-го усложняется тем, что уравнения линий поля зачастую не удаётся проинтегрировать аналитически

Уравнение линий поля:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{ds}{|\mathbf{B}|}$$

- Однако это описание может быть упрощено за счёт:

1. подходящего выбора системы координат, что позволяет сократить число функций, по которым производится разложение в ряд Тейлора вблизи нулевой точки
2. нахождения таких направлений (исходящих из нуля лучей, называемых далее **реперами**), на которых вектор магнитного поля **B** направлен вдоль радиус-вектора **R** или обращается в нуль



Реперы вблизи невырожденной (или аксиально-симметричной) нулевой точки 1-го порядка типа *B*

Нулевые точки порядка выше 1-го

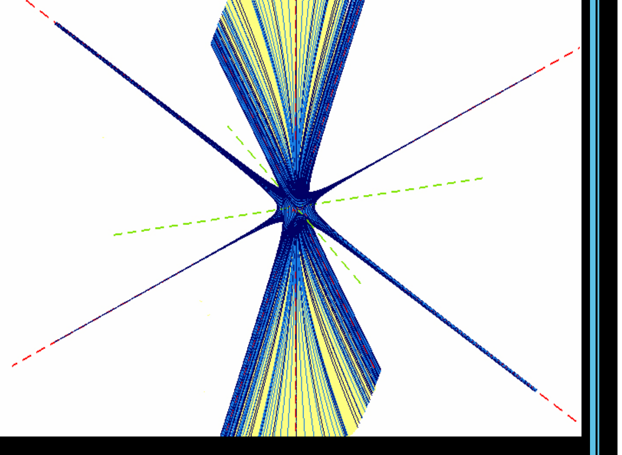
- Решается задача на собственные функции (1). Разложение потенциала можно производить по однородным гармоническим полиномам, представляющим собой записи перенормированных шаровых функций в декартовой системе координат
- В нулевой точке единственность решения дифференциального уравнения для линий поля может нарушаться, при этом в ней могут оканчиваться либо одномерные многообразия (изолированные линии, называемые γ-линиями), либо двумерные (образуемые силовыми линиями поверхности, называемые Σ-поверхностями)
- Решение задачи (1) (нахождение реперов) $\Rightarrow$ нахождение γ-линий и направляющих Σ-поверхностей, описание асимптотического поведения силовых линий вблизи них

Реперы вблизи нулевой точки порядка *p*:

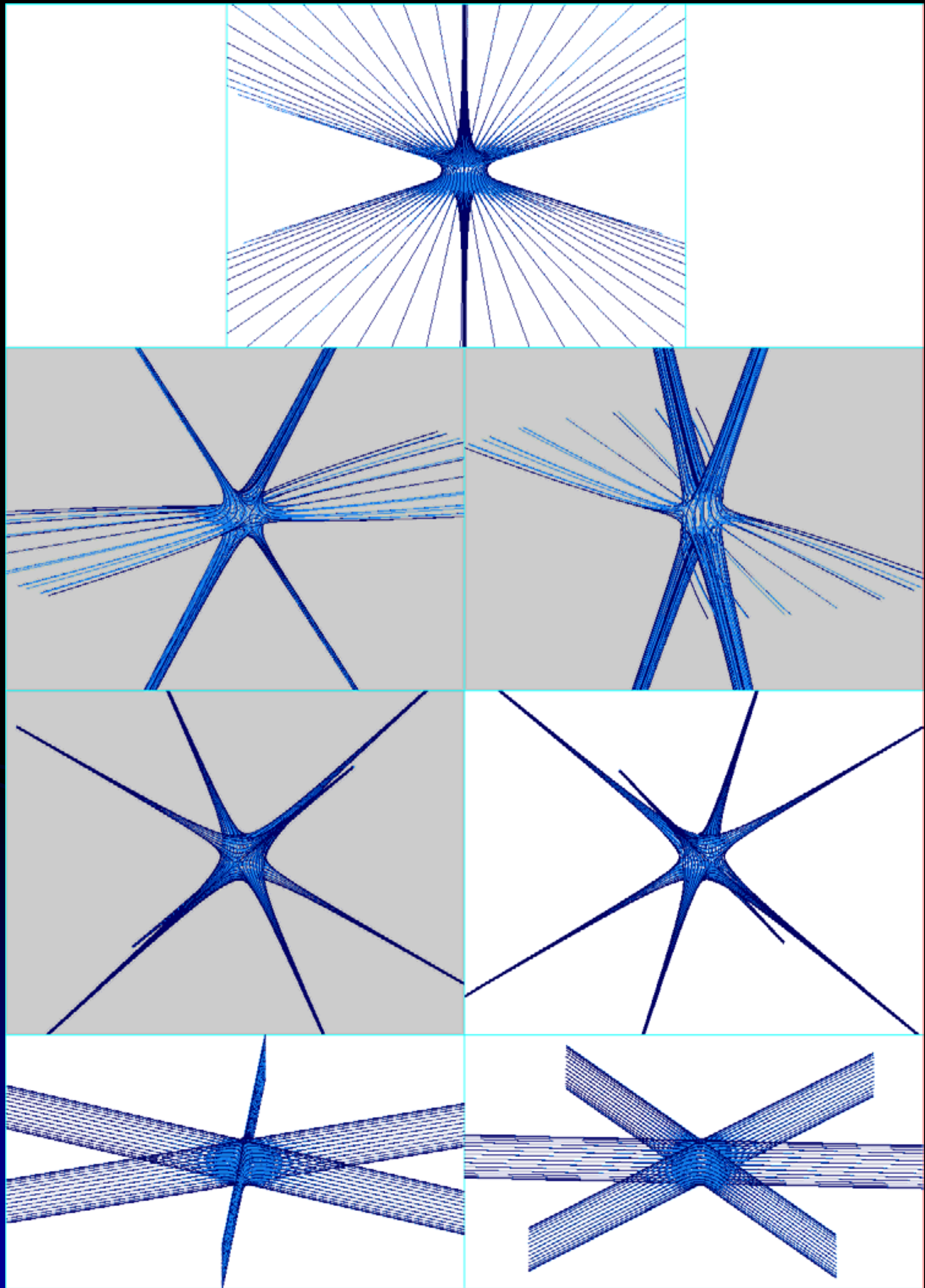
$$B_i = \frac{1}{p!} T_{ij_1\ldots j_p} R_{j_1} \ldots R_{j_p}$$

$$T_{ij_1\ldots j_p} = \frac{\partial^{p+1} U}{\partial x_i \partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p}}$$

$$B_i = \lambda |\mathbf{R}|^{p-1} R_i \qquad (1)$$



2-й порядок: базисные функции



Порядок действий:

- выбираем направление оси *Oz* (всегда можно выбрать направление, совпадающее с парой дополняющих друг друга до прямой реперов)
- выбираем поворот системы координат
- выбираем масштаб

$\Rightarrow$

$$V_3^0 = \frac{1}{6}\left[2z^3 - 3z\left(x^2 + y^2\right)\right]$$

$$V_3^{1,2} = xyz$$

$$V_3^{2,1} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(x^3 - 3xy^2\right)$$

$$V_3^{2,2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(3x^2y - y^3\right)$$

Потенциалы, заданные базисными функциями

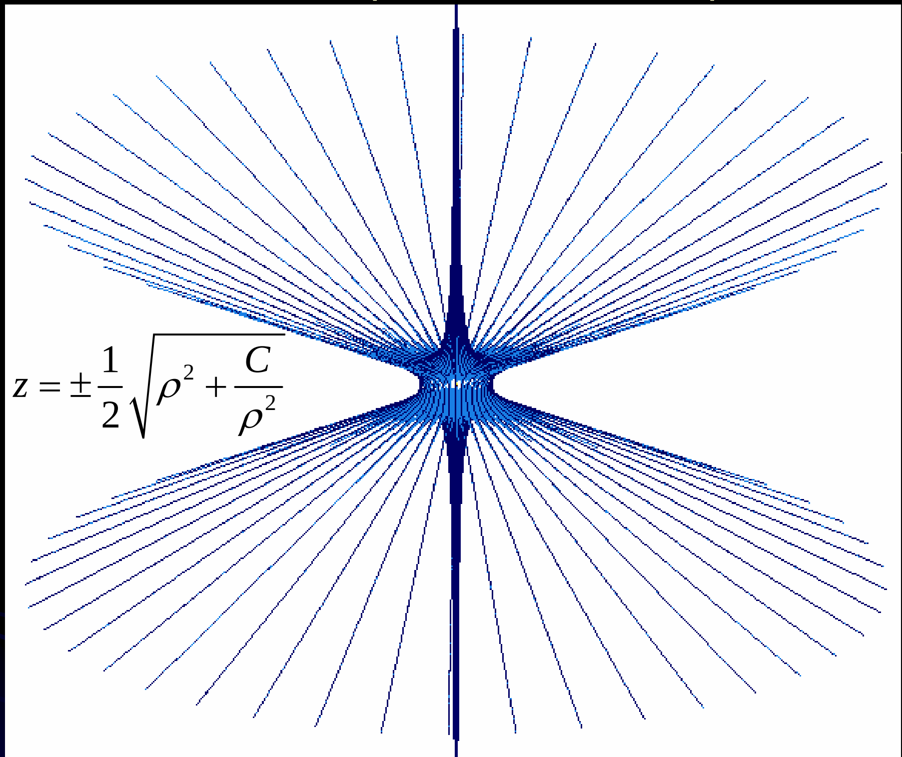
$$V_3^0 = \frac{1}{6}\left[2z^3 - 3z\left(x^2 + y^2\right)\right]$$

$$V_3^{1,2} = xyz$$

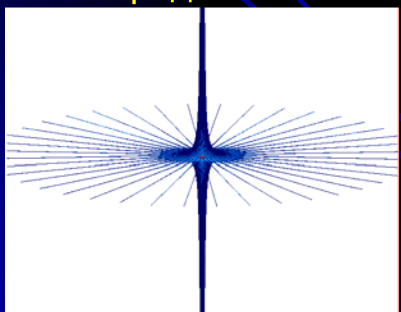
$$V_3^{2,1} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(x^3 - 3xy^2\right)$$

$$V_3^{2,2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(3x^2y - y^3\right)$$

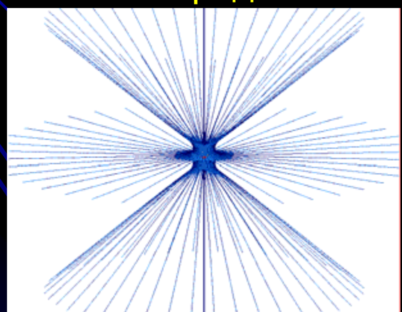
Аксиально-симметричное поле в окрестности:



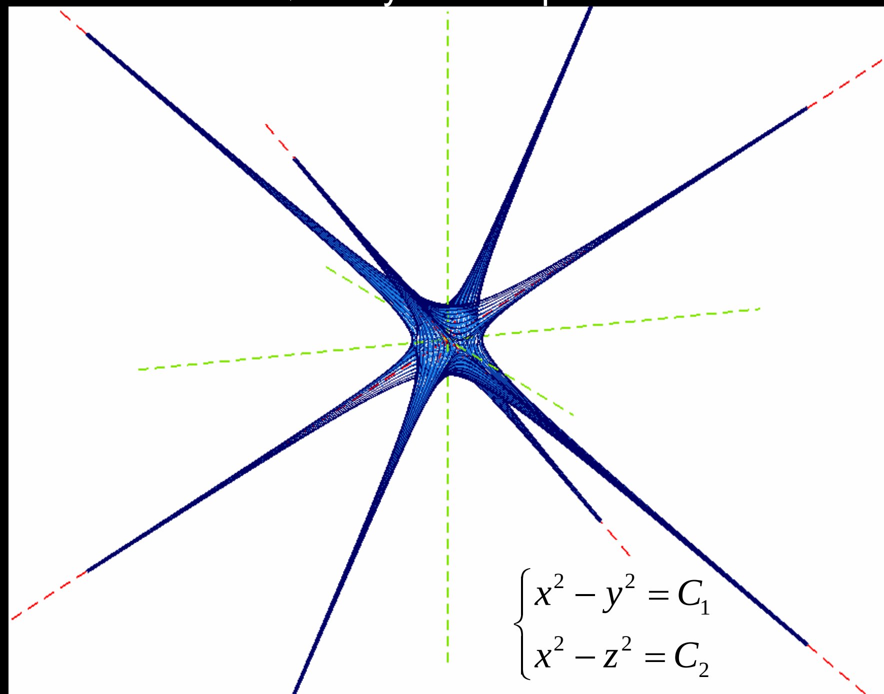
1-й порядок



3-й порядок



В нулевой точке пересекаются 3 нулевые прямые:



Парные комбинации базисных функций

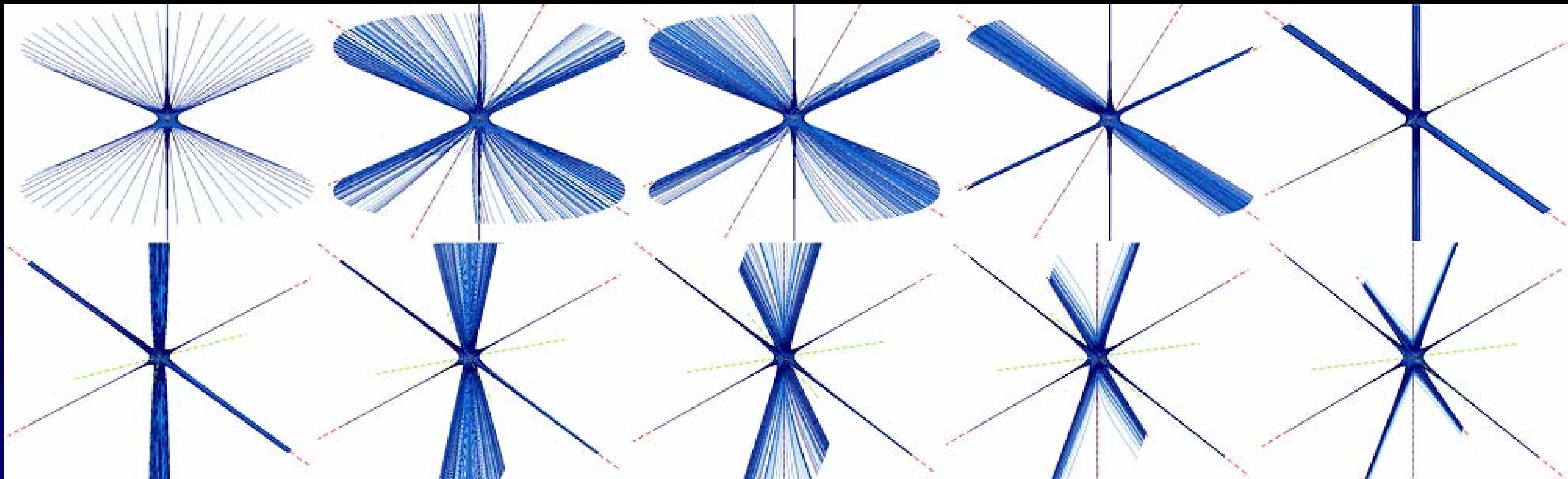
$$U_{I} = V_3^0 + K V_3^{1,2}$$

$$U_{II} = V_3^0 + \frac{K}{\sqrt{2}}\left(V_3^{2,1} + V_3^{2,2}\right)$$

$$U_{III} = V_3^{1,2} + K V_3^{2,1}, \qquad U_{IV} = V_3^{1,2} + K V_3^{2,2}$$

- Для парных комбинаций уравнения реперных прямых удаётся получить аналитически
- В случаях I и II существуют соответственно по 2 и 3 плоскости, которые линии поля не покидают
- В случае I удаётся проинтегрировать уравнения проекций линий поля на плоскость *xOy*

- **Парная комбинация I**: линии поля при различных значениях параметра *K*



Значения *K*:

0	**0.15**	**0.25**	**0.5**	**1**
1.3	**2**	**2.8**	**4**	**5.5**

Нулевые точки 2-го порядка: общее решение

- В общем случае, если коэффициент при V_3^0 не обращается в нуль, задача сводится к рассмотрению линий поля, заданного вблизи нулевой точки потенциалом

$$U = V_3^0 + KV_3^{1,2} + FV_3^{2,1} + GV_3^{2,2}$$

$$B_i = \frac{1}{p!} T_{ij_1\ldots j_p} R_{j_1} \ldots R_{j_p}$$

$$T_{ij_1\ldots j_p} = \frac{\partial^{p+1} U}{\partial x_i \partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p}}$$

$$B_i = \lambda |\mathbf{R}|^{p-1} R_i \qquad (1)$$

Задача (1) на собственные функции принимает вид:

$$\begin{pmatrix} -xz + Kyz + F\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}Gxy \\ -yz + Kxz - \sqrt{2}Fxy + G\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2}\left(2z^2 - x^2 - y^2\right) + Kxy \end{pmatrix} = \lambda\sqrt{x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Решениями являются прямые *y=ux*, *z=vx*, где *u* и *v* определяются из уравнений

$$\begin{aligned} f(u) = {} & \left(2F^2 + KFG - K^2\right)u^6 + \left(KF^2 - 3KG^2 - 12FG + 2K^3\right)u^5 + \ldots \\ & + \left(18G^2 - 12F^2 - 5KFG + K^2\right)u^4 + 2\left(20FG - KF^2 - KG^2 - 2K^3\right)u^3 + \ldots \\ & + \left(18F^2 - 12G^2 - 5KFG + K^2\right)u^2 + \left(KG^2 - 3KF^2 - 12FG + 2K^3\right)u + \ldots \\ & + 2G^2 + KFG - K^2 = 0, \end{aligned}$$

$$v = \frac{Fu\left(3-u^2\right) + G\left(3u^2-1\right)}{\sqrt{2}K\left(1-u^2\right)}$$

Нулевые точки 2-го порядка: общее решение

- Если коэффициент при V_3^0 равен нулю, потенциал вблизи нулевой точки

$$U = V_3^{1,2} + FV_3^{2,1} + GV_3^{2,2}$$

Решениями задачи на собственные функции будут прямые *y=ux*, *z=vx*, где *u* и *v* определяются из уравнений

$$g(u) = FGu^6 + \left(F^2 - 3G^2 + 2\right)u^5 - 5FGu^4 - \ldots$$
$$-2\left(G^2 + F^2 + 2\right)u^3 - 5FGu^2 + \left(G^2 - 3F^2 + 2\right)u + FG = 0,$$
$$v = \frac{Fu\left(3-u^2\right) + G\left(3u^2 - 1\right)}{\sqrt{2}\left(1-u^2\right)}$$

Задача на собственные функции для нулевой точки 2-го порядка может давать в качестве решений в совокупности с реперами оси *Oz* до 14 реперов

Исключительными являются наборы значений параметров *KFG*>0, |*K*|=2, |*F*|=|*G*|=1, при которых функция *f*(*u*) тождественно обращается в нуль. Система линий поля вблизи нулевой точки при этом с точностью до поворота и масштабного фактора совпадает с системой, задаваемой V_3^0

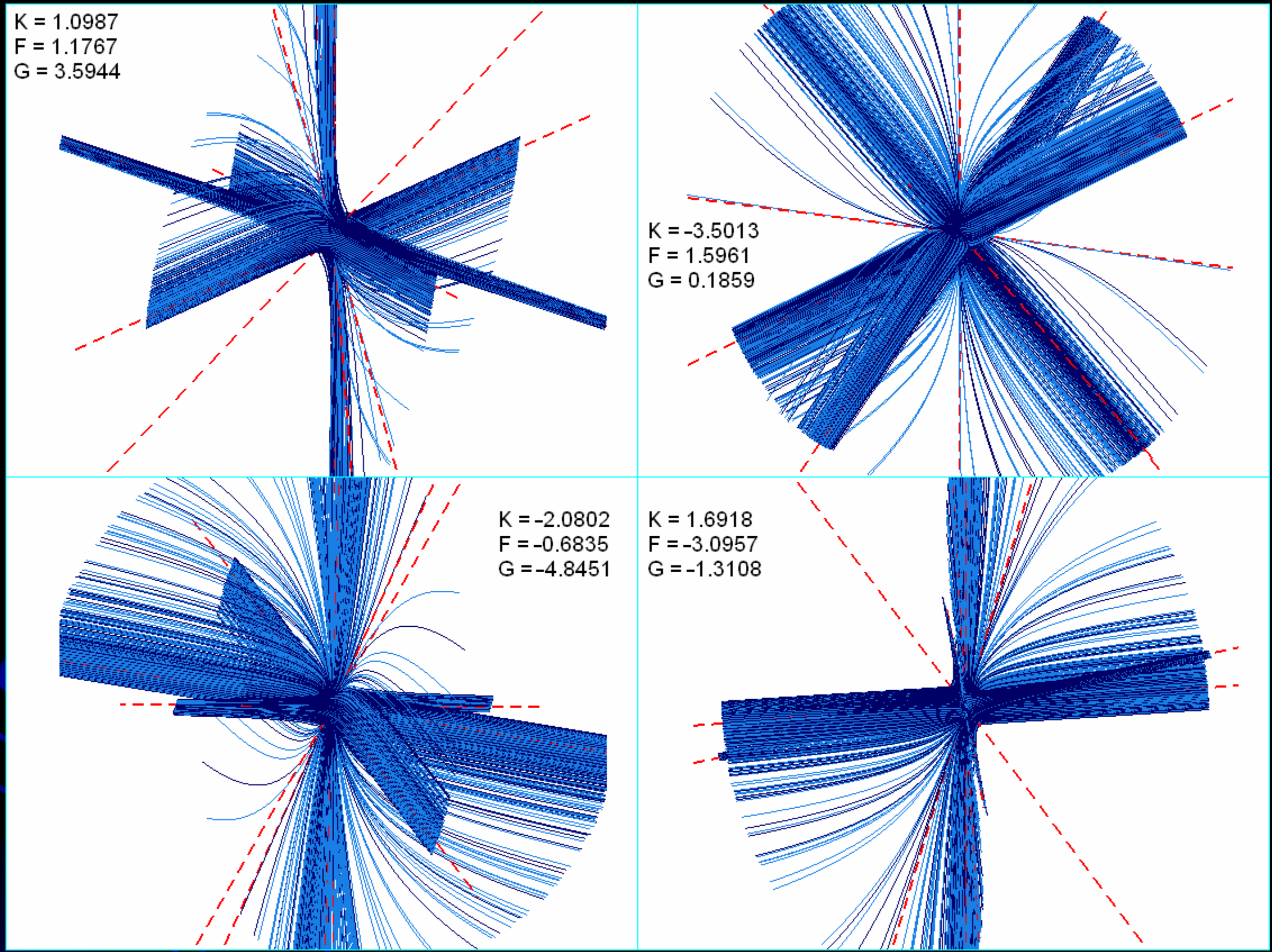
В случае нулевой точки 1-го порядка число реперов, если оно конечно, равнялось 6

Отношения эквивалентности при выбранной нормировке:

$$V_3^0 + V_3^{1,j} \propto \sqrt{2}V_3^{2,k}$$
$$V_3^0 + V_3^{2,j} \propto \sqrt{3}V_3^{1,k}$$
$$V_3^0 + 2V_3^{1,2} + V_3^{2,1} + V_3^{2,2} = \sqrt{5}V_3^0$$
$$(j,k=1,2)$$

Нули 2-го порядка: общий случай

- Численное моделирование ⇒ у нулевой точки 2-го порядка общего вида 14 или 10 ненулевых реперов



- *Lukashenko A.T., Veselovsky I.S.* General principles of describing second- and higher-order null points of a potential magnetic field in 3D // Geomagnetism and Aeronomy. 2015. V. 55. № 8. P. 1152–1158
- *Лукашенко А.Т.* Об описании потенциального векторного поля без источников вблизи нулевых точек высших порядков в пространстве // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, математика, механика. 2016. № 4. С. 18–22

Заключение

- У наиболее типичной (невырожденной) нулевой точки 1-го порядка имеются шесть ненулевых реперов, составляющих три взаимно перпендикулярные прямые. У наиболее типичной точки 2-го порядка имеется до 14 реперов, которые являются ненулевыми и могут иметь различное взаимное расположение в пространстве
- Наличие нулевых прямых (возможны одна у нуля 1-го порядка и до трёх у 2-го) означает вырождение. В этих случаях возникает необходимость учёта вдоль соответствующих прямых членов разложения более высокого порядка. Возможно также чисто геометрическое вырождение (как при возникновении аксиальной симметрии)
- Иерархию вырожденности нулевых точек можно строить с учётом значимости лишь нелинейности более высокого порядка, либо принимая к тому же во внимание появление дополнительных симметрий

Спасибо за внимание!