ISSN 1729-5440

МАТЕМАТИКА

В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ

11

2013

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕРИАЛЫ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ»,
ПОСВЯЩЁННОЙ 110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И. Г. ПЕТРОВСКОГО

УДК 372.851, 517.95

СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. В. Боровских

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1;
e-mail: bor.bor@mail.ru

Представлена разработка семинарских занятий по курсу «Уравнения с частными производными», который автор читает на механико-математическом факультете МГУ. Описаны место и функции курса в рамках профессионального математического образования, возникающие методические проблемы, основные идеи их разрешения, методы и приёмы обучения, педагогические инструменты достижения поставленных целей.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, семинарские занятия, педагогические цели и задачи, методика преподавания.

1. Курс уравнений с частными производными[1] является, с одной стороны, одним из самых трудных в математическом образовании[2], с ним сравним по сложности разве что курс математического анализа. С другой — он занимает в этом образовании особое место, выполняя одновременно целый ряд важнейших функций.

Среди этих функций в первую очередь надо назвать ***синтезирующую***. Фактически именно в этом курсе студенты начинают активно использовать всё, что они выучили до того или что изучают параллельно — алгебру, геометрию (аналитическую и дифференциальную), дифференциальное и интегральное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения, теорию функций действительного и комплексного переменного, вариационное исчисление, функциональный анализ, теорию вероятностей. Именно посредством этой дисциплины их образование становится — если она изучается не только для сдачи экзамена — целостным. Оно становится действительно математическим в полном смысле этого слова.

Вторая важнейшая функция курса — ***интерфейсная***. Именно этот курс устанавливает связь математических проблем, идей, методов, теорий с различными задачами механики, физики, химии, биологии, техники. С другой

[1] Иногда он же называется «Уравнения математической физики». На мехмате МГУ есть исторический анекдот про то, как С. Л. Соболев читал в потоке математиков курс «Уравнения с частными производными» по своему учебнику «Уравнения математической физики», в то время как другой преподаватель читал тогда же в потоке механиков курс под названием «Уравнения математической физики» по учебнику И. Г. Петровского «Лекции об уравнениях с частными производными».

[2] От одного из студентов узнал присказку: «УрЧП сдал — можно и жениться!».

стороны, именно курс уравнений с частными производными позволяет продемонстрировать, как происходит трансформация естественно-научных представлений в математические и обратно, как происходит взаимодействие между различными науками.

Третья фундаментальная функция этого курса — ***развивающая***. Именно здесь начинают в полную меру работать такие функции человеческого мышления, как планирование решения[3], использование эвристических подходов, моделирование[4], преобразование различных форм представления изучаемого объекта друг в друга, схематизация, систематизация и пр.

Не менее важной оказывается и ***интеллектуальная*** функция курса. Студентам здесь приходится осваивать такие нетривиальные вещи, как оперирование общими формулами (а не конкретными функциями), рассуждения, в которых фигурируют классы задач и уравнений (а не отдельные уравнения и задачи), умение опираться на качественные методы (когда надо что-то узнать, например, о решении, не находя его) и пр.

Ну и, наконец, собственно ***предметная*** функция курса — освоение нового содержания. Это и формулы решения уравнений различных типов, и метод Фурье, и довольно тонкая техника интегрирования, и использование обобщенных функций, и знакомство с соболевскими пространствами, и многое-многое другое.

2. Все перечисленные выше функции сами по себе создают достаточно многослойный фон целей преподавания: ведь выстроить курс так, чтобы он все эти функции действительно выполнял, — довольно сложная педагогическая задача уже сама по себе, независимо от предметного содержания. А оно нетривиально и только добавляет проблем. Назовем лишь наиболее значимые из них.

Во-первых, все представления, связанные с уравнениями с частными производными, студентам ранее не встречались (представление множества решений через произвольные функции, замена независимых переменных как способ преобразования уравнения, негладкость и даже разрывность решений как внутреннее свойство уравнений, внешне вполне благополучных, эвристические соображения и техника их проверки, трансформация физических со-

[3] В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (где, как бы ты ни решал, рано или поздно решение получишь), в уравнениях с частными производными блуждание наугад, как правило, ни к чему не приводит. Здесь требуется всё время удерживать понимание того, откуда и куда мы идём.

[4] Моделирование, вопреки широко распространенному мнению, — это не объявление «моделью» любого уравнения или другого математического объекта. Моделирование — это, прежде всего, построение системы моделей. Системы могут строиться по разным принципам и на разных основаниях. Системы моделей обычно строятся так, чтобы обслуживать ту или иную деятельность (например, деятельность, связанную с исследованием газовых течений для проектирования самолетов и авиационных двигателей), и структура системы моделей тесно связана с самой этой деятельностью. Без понимания сущности деятельности, которую обслуживает та или иная система моделей, невозможно понять саму систему. Ибо основные факторы, влияющие на построение моделей и их взаимное отношение — что важно, что нет, что более существенно, что менее, какие величины большие, какие малые, и т. п., — оказываются совершенно «трансцендентными». Поэтому слово «моделирование», вообще говоря, нужно произносить с осторожностью.

ображений в математические факты, моделирование как построение системы моделей и пр.), и их приходится осваивать по мере изучения курса.

Во-вторых, большинство основных, фундаментальных идей, используемых в теории уравнений с частными производными, лежат за рамками математики, и для их адекватного восприятия, не говоря уже о понимании, требуется постоянно выходить либо в физические, либо в механические интерпретации, использовать интуицию и эмпирические представления. Постоянная циркуляция между ними и соответствующими им строгими математическими фактами — один из сложнейших пластов математической культуры, который приходится осваивать.

В-третьих, действия, которые используются в уравнениях с частными производными, студентами, как правило, уже освоены (это операции дифференцирования, интегрирования, действия с рядами и пр.). Поэтому для нашего курса оказывается бесполезным такой вид работы, как «практическое занятие». Хорошо известно, что такие занятия порой превращаются в абсолютно бессмысленную «подстановку конкретных функций в общую формулу», которая ничего не даёт ни уму, ни сердцу студентов. Столь косная и рутинная деятельность скорее создает отрицательную, чем положительную мотивацию изучения курса, а это приводит, в силу его сложности, к тому, что на экзамене либо большая часть студентов получает двойки (и курс приобретает славу инквизиторского), либо преподавателю приходится идти на сделку с совестью и ставить положительные оценки ни за что (и тогда курс приобретает не менее удручающую славу профанационного).

В-четвертых, преподаватель курса уравнений с частными производными при отборе учебного материала оказывается в довольно странном положении. С одной стороны, для выполнения перечисленных выше функций предмет под названием «уравнения с частными производными» должен рассматривать достаточно сложные задачи. Именно на них проявляется и смысл, и эффективность соответствующих теоретических конструкций. С другой стороны, время на занятии ограничено, и рассмотрение одной лишь мало-мальски сложной задачи может занять целую пару. А таких задач немало. Возникает естественное сомнение, возможно ли достичь поставленных целей имеющимися средствами?

Другая сторона той же проблемы — ограниченность времени на контрольной работе. Аудиторной проверке поддаётся только что-то уж совсем элементарное. К тому же решить сложную задачу безошибочно — довольно большое искусство. А пустяковая ошибка в самом начале решения сразу ставит крест на всей дальнейшей работе. Выходит, что преподаватель, дающий на контрольной хоть сколь-нибудь содержательные задачи, проверяет не знания и не навыки выполнения предметных действий, а банальное внимание и способность к самоконтролю. Конечно, никто не скажет, что это ненужная способность и что её не надо формировать и тем более — проверять. Но при чём здесь дисциплина «уравнения с частными производными»?

3. Преодоление описанных трудностей, конечно, не совсем тривиально и требует как организационных, так и педагогических усилий. Среди организационных решений назовём несколько важнейших, они оказались весьма существенными, поскольку потребовали изменения самого взгляда на предмет.

Во-первых, место «практического занятия» занимает «семинар». Семинарское занятие отличается от практического тем, что основное время на нём занимают не вычисления, а обсуждения, и именно эта форма оказывается наиболее адекватной поставленным целям.

Во-вторых, место «подстановки функции в формулу» на семинаре занимает обсуждение происхождения формул — эвристические соображения, физические идеи и пр. Сопоставление этих соображений с конкретными задачами переносится в область самостоятельной работы. Это, конечно, даётся студентам с усилием, но именно в этом и состоит задача интеллектуального развития — самостоятельное преодоление пространства между интуицией и эмпирикой с одной стороны, и теоретическими конструкциями с другой.

Фактически семинар состоит из двух частей. На первой разбираются не получившиеся или вызвавшие затруднения задачи из домашнего задания, а на второй — проводится мини-лекция. От лекционной части курса она как раз и отличается тем, что содержит не формализованное изложение теории, а эвристические и физические соображения и подходы (на которые в лекционной части курса практически нет места — она и так очень «плотная»). Это позволяет, с одной стороны, опереться на интуитивные представления и физические соображения, с другой — осваивать постепенно интерфейсную функцию дисциплины, а с третьей — активизировать деятельность по самостоятельному осмыслению услышанного и применению этого к конкретным задачам из домашнего задания. Категорический отказ от предоставления студенту возможности «повторять по образцу» создаёт условия (они, конечно, конфликтные, но педагогика без конфликта бессильна, главное — чтобы конфликт был продуктивным) для психического развития, и именно это оказывается основным мотивом учебной деятельности.

В-третьих, весь первый семестр — «эмпирический». Это означает, что мы работаем на уровне рассуждений типа «если сделать то-то, то получим то-то». Здесь нет никаких общих утверждений, а есть примеры, контрпримеры, схемы, приемы и т. п. И только во втором семестре созданные таким образом представления начинают трансформироваться в теоретические — начинается разговор о методах, о типичности свойств, об общих утверждениях для классов уравнений и классов функций и пр. Это позволяет освоить ту систему представлений, которая необходима для свободного понимания теории, не обременяя себя рамками формализмов и несущественных деталей. Детали возникнут потом — естественно и, как это ни странно, в полном соответствии с историческим путём развития науки.

В-четвёртых, вводятся домашние самостоятельные работы. На них даются достаточно трудные задачи, у каждого студента — свой набор вариантов. На выполнение самостоятельной работы из пяти заданий даётся месяц-полтора. Задания делаются дома, потом сдаются, проверяются, если есть ошибки — возвращаются на доработку. Возможны несколько итераций, но в итоге должно быть сделано всё и правильно, вплоть до деталей.

Эти самостоятельные работы, с одной стороны, позволяют по-настоящему соприкоснуться с предметом и понять его суть, а с другой — служат достаточно эффективным средством текущего контроля. На долю аудиторных контрольных работ остаётся только то, что реально можно на них осуществить — проверка освоения элементарных действий. Например, в контрольной по методу Фурье отдельное задание состоит в разделении переменных, отдельное — в решении спектральной задачи, отдельное — в разложении функции по ортогональной системе, и отдельное — в превращении неоднородных краевых условий в однородные за счёт замены неизвестной функции.

Опыт показывает, что если студенты вполне освоили элементарные действия, то за сложную задачу они уже берутся без трепета. Потом, правда, при выполнении самостоятельных работ им приходится преодолевать некоторые трудности, поскольку не всегда элементарные действия стыкуются друг с другом гладко, но это уже не останавливает, а скорее подстёгивает их, побуждает довести решение до конца несмотря на трудности. Эта позиция — довести дело до конца несмотря на трудности — одна из важнейших не только для студента, но и является чрезвычайно важным качеством для дальнейшей профессиональной деятельности (даже если это будет не профессия математика), и возможность развить это качество в курсе уравнений с частными производными представляется не менее важной, чем освоение предметной составляющей курса.

Наконец, в качестве уже чисто методического приёма отметим специально выделенное освоение общего метода под названием «метод двойственного действия». Как ни странно, этот метод, используемый практически всеми специалистами, ни в одном учебнике не отражён именно как метод, основная идея которого — *то, что можно доказать, продифференцировав и подставив в уравнение некоторую формулу, можно* (*причём, как правило, в гораздо большей общности*) *получить, умножив исходное уравнение на подходящую функцию и проинтегрировав по подходящей области*. Этот приём надёжно работает и в интегральных формулах, и в спектральных задачах, он позволяет естественно ввести преобразования Фурье и Лапласа. Кроме того, опыт показывает, что отдельное рассмотрение этого метода резко упрощает освоение техники работы с обобщёнными функциями: основные сложности при решении задач связаны там с интегрированием по частям (то есть с применением формул Грина)[5], а когда оно уже надёжно освоено в методе двойственного действия, теория обобщённых функций превращается в удобную формализацию тех отношений, которые в «классическом» исполнении носят либо условно-символический характер (как, например, преобразование Фурье от синусов и экспонент), либо требуют для обоснования чрезвычайно сложной аналитики.

4. Следует подчеркнуть, что приведённые организационные решения могут оказаться не вполне эффективными, если одновременно с ними не использовать и некоторые педагогические идеи. Среди них назовём две, которые, на взгляд автора, являются центральными.

[5] На самом деле именно эта проблема послужила автору основанием для того, чтобы вынести изучение «интегрирования по частям» в отдельное занятие, ну а там уж оказалось, что это даёт гораздо бо́льшие выгоды, чем просто решение методической проблемы в теме «обобщённые функции».

Первая из них — использование конфликтных механизмов развития. Хотя мы в обыденной жизни и стремимся избегать конфликтов, к сожалению, развитие без них невозможно. Здесь следует отличать *коммунальный* конфликт от *деятельностного* (последний — это конфликт различных видов, форм, типов человеческой деятельности). В педагогике деятельностный конфликт обычно возникает как конфликт между прошлой и будущей деятельностью ребёнка, школьника, студента. Он выражается в противопоставлении стремления следовать прежним стереотипам действий и стремления к участию в деятельности либо нового типа, либо новой формы, либо в новой роли, что невозможно сделать, используя старые стереотипы. Разрешение конфликта, состоящее в преодолении собственной инерции, ломке старых стереотипов и формировании новых способов деятельности, и есть, по существу, развитие в педагогическом смысле этого слова.

Развитию служат и задачи без «специально подобранных» уравнений и коэффициентов, и использование того, что «в классе не проходили» (но что можно прочитать в учебнике), и задачи с «нестандартными» условиями (которые нельзя решить стереотипными действиями), и избыточность заданий и пр. Конечно, всё это — дополнительная нагрузка на преподавателя (не говоря уже о том, что и ему для преподавания в такой позиции надо преодолеть свои собственные стереотипы действий — «пришёл, открыл задачник, задал задачу, объяснил решение, ушёл»), но результативность оправдывает затраты.

Вторая педагогическая идея, которую автор считает чрезвычайно полезной — это использование социальных механизмов взаимодействия студентов между собой. К сожалению, вузовская педагогика очень мало использует тот научный факт, установленный ещё в начале прошлого века выдающимся отечественным психологом Л. С. Выготским [1], что всякая функция человеческой психики, начиная с самых элементарных, сначала существует во внешней, «социальной» форме, и только потом, в результате *интериоризации*, становится «внутренней». Если мы хотим научить ребенка самоконтролю — сначала надо научить его проверять действия других людей. Если мы хотим научить его критичности мышления (в основе которой лежит «спор с самим собой») — сначала надо научить его спорить с другими. Если мы хотим научить его что-то доказывать, то сначала ему надо потренироваться в доказательстве перед другими (как это происходит, например, на математических боях).

Поэтому для формирования всех этих функций очень важны подсказки, обсуждения, опора на «маргинальные» позиции при обсуждении того или иного вопроса и последовательная разработка их в общей дискуссии. Не следует считать вредным, если вся группа решает трудную задачу, попавшуюся одному из студентов. Нужно понимать, что, в конце концов, вся эта деятельность пойдёт ему на пользу независимо от того, может он вообще решить эту задачу самостоятельно или нет.

Следует упомянуть ещё один научный факт, установленный тем же Л. С. Выготским: если человек не справляется с проблемой «внутренними» средствами — он «выносит» эту задачу вовне и начинает решать её с помощью внешних средств, прежде всего — с помощью окружающих его людей. Нередко активное восприятие идей, высказываемых в таких коллективных обсуждениях, оказывается гораздо более эффективным и продуктивным, чем многочасовое бесплодное корпение в одиночку над неподдающейся задачей.

5. Приведем теперь рабочий план[6] занятий, которые автор проводит со студентами и, для примера, содержание одной из самостоятельных работ (в каждом задании приводится условие и один из 30 вариантов).

I семестр

1. Входная контрольная работа. Линейные уравнения 1-го порядка с частными производными.
2. Квазилинейные и нелинейные уравнения и системы.
3. Уравнение струны (вывод и решение).
4. Задачи на полуоси и на отрезке.
5. Уравнения Лапласа и Пуассона (вывод, формула решения).
6. Потенциал простого и двойного слоя.
7. Краевые задачи и функция Грина.
8. Гармонические функции. Сферические гармоники.
9. Контрольная работа. (1. Квазилинейные уравнения 1-го порядка. 2. Задача Гурса. 3. Волновое уравнение на полуоси. 4. Гармонические функции и оператор Лапласа. 5. Функция Грина (метод отражений).)
10. Уравнение теплопроводности (вывод и формула решения).
11. Разделение переменных для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности (однородные уравнения).
12. Разделение переменных для неоднородных уравнений.
13. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа (в прямоугольной области, в круге, в шаре).
14. Многомерное волновое уравнение и функции Бесселя.
15. Контрольная работа. (1. Разделить переменные (получить спектральные задачи и сопровождающее уравнение). 2. Найти собственные значения и собственные функции спектральной задачи. 3. Проверить ортогональность системы функций и разложить по этой системе функцию $f(t,x)$. 4. Свести задачу к задаче с однородными граничными условиями.)

II семестр

16. Метод двойственного действия (одномерное волновое уравнение).
17. Функция Римана.
18. Метод изоляции особенности (уравнение Пуассона и теплопроводности).
19. Метод двойственного действия в многомерных волновых уравнениях.
20. Фундаментальное решение. Свертка. Приведение уравнений к каноническому виду.
21. Вариационные задачи. Связь между уравнением и вариационным интегралом.
22. Метод двойственного действия в спектральных задачах.

[6] Его, как и задачи домашних самостоятельных работ, можно найти на сайте http://math.msu.ru/department/diffur в разделе «читаемые курсы».

23. Преобразование Лапласа.
24. Преобразование Фурье.
25. Контрольная работа. (1. Привести дифференциальное уравнение к каноническому виду, указать соответствующую замену переменных. 2. Продифференцировать сингулярный интеграл (после дифференцирования вернуться к исходным переменным). 3. Для одномерной спектральной задачи найти сопряженную спектральную задачу, собственные значения и собственные функции исходной и сопряженной задач. 4. Найти прямое/обратное преобразование Лапласа от заданной функции. 5. Найти прямое/обратное преобразование Фурье от заданной функции.)
26. Обобщенные функции. Пространства D, D', S, S'.
27. Дифференцирование и дифференциальные уравнения в пространствах обобщенных функций.
28. Прямое произведение, свертка, фундаментальное решение, преобразования Фурье и Лапласа в пространствах обобщенных функций.
29. Соболевские пространства.
30. Контрольная работа. (1. Для каждого из пространств D, D', S, S' указать те функции из предъявленного списка, которые принадлежат этому пространству, а для тех функций, которые этому пространству не принадлежат — указать, почему. 2. Решить дифференциальное уравнение в обобщенных функциях. 3. Найти свертку обобщенных функций. 4. Найти преобразование Фурье (в S') от заданной функции. 5. Доказать, что заданная функция является фундаментальным решением некоторого (многомерного) дифференциального оператора.)

1-я самостоятельная работа

Задание 1. Уравнения первого порядка.

Найти: общее решение уравнения; поверхность (гиперповерхность), удовлетворяющую этому уравнению и проходящую через заданную линию (поверхность); область, на которой решение, определяющее эту гиперповерхность, является классическим.

Уравнение	Линия/поверхность
$yz\,u_x + xy\,u_y - xz\,u_z = 0$	$y = z^2,\;\; u = x^2 + z^2$

Задание 2. Гиперболическое уравнение с начальными условиями на гиперболе с характеристическими асимптотами.

Найти общую формулу решения задачи с данными на кривой; найти решение при указанных начальных данных; определить и изобразить на плоскости область, в которой для любых начальных данных классическое решение существует и единственно а) если данные заданы на обеих ветвях гиперболы, б) если данные заданы на одной ветви, в) если данные заданы на указанном фрагменте этой ветви.

Уравнение	Условия	Кривая Γ	Данные	Ветвь	Фрагмент
$u_{xx} - 2u_{xy} = 0$	$u\|_\Gamma = \varphi(y)$ $u_y\|_\Gamma = \psi(y)$	$y(2x+y) = 1$	$\varphi(y) = y$ $\psi(y) = 1$	верхняя	$y \in [1,3]$

Задание 3. Смешанная задача на полупрямой для гиперболических уравнений с однонаправленными характеристиками.

Найти формулу решения смешанной задачи а) при $t > 0$ и указанных x, б) при $t < 0$ и указанных x; выписать условия согласования данных; указать, где решение а) существует для любых данных и единственно, б) существует только при дополнительных ограничениях на данные и единственно, в) существует для любых данных, но не единственно, г) существует только при дополнительных ограничениях на данные и не единственно; при указанных данных найти соответствующее решение.

Уравнение, область	Начальные условия	Краевые условия	$\varphi(x)$, $\psi(x)$	$\nu(t)$
$u_{tt} - 3u_{xt} + 2u_{xx} = 0$ $x \in [0, +\infty]$	$u\|_{t=0} = \varphi(x)$ $u_t\|_{t=0} = \psi(x)$	$u\|_{x=0} = \nu(t)$	$\varphi(x) = x$ $\psi(x) = 0$	$\nu(t) = 0$

Задание 4. Смешанная задача для волнового уравнения на отрезке.

Найти общую формулу решения смешанной задачи; выписать условия согласования данных, при которых решение будет классическим; для заданных данных найти решение и вычислить его значение и пространственную производную в граничных точках отрезка; определить гладкость полученного решения; описать линии, на которых происходят разрывы решения и/или его производной и найти величину разрыва; объяснить, почему решение оказалось недостаточно гладким.

Уравнение, область (t, x)	Начальные условия	Краевые условия	$\varphi(x)$, $\psi(x)$	$\nu(t)$, $\mu(t)$
$u_{tt} = a^2 u_{xx}$ $[0, +\infty] \times [0, l]$	$u\|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t\|_{t=0} = \psi(x)$	$u\|_{x=0} = \nu(t)$, $u\|_{x=l} = 0$	$\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 0$	$\nu(t) = t$

Задание 5. Одномерное волновое уравнение (задачи качественного характера — см. задачник [2, глава 3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Выготский Л. С. История развития высших психических функций. Собр. соч. в 6 т. Т. 3. Проблемы развития психики. — М.: Педагогика, 1983. С. 5–328.

2. Сборник задач по уравнениям с частными производными / Под. ред. А. С. Шамаева. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2005. 158 с.

Поступила 28.01.2013

SEMINARS ON PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. V. Borovskikh

Course design of seminars on partial differential equations, which the author teaches at mechanics and mathematics department of Moscow State University is presented. The location and function of the course within the professional mathematics education, methodological problems arise, the basic ideas to solve them, the methods and techniques of teaching, teaching tools for achieving the goals are described.

Keywords: partial differential equations, seminars, educational goals and objectives, methods of teaching.