

1.5. Докажите, что

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} w(t)dw(t) = -\frac{1}{2}(w(t_i))^2 - \frac{1}{2}(t_i - t_i)$$

...випередивши процес).

3. Дайте определение условного математического ожидания случайной величины ξ относительно σ -алгебры событий $\mathcal{F}$. Докажите, что $M(\xi | \mathcal{F}) = \eta$ можно рассматривать как решение следующей оптимизационной задачи

$$\xi(t), \text{ удовлетворяющего условиям}$$

$\xi(t)$, удовлетворяющие стохастическому дифференциальному уравнению $d\xi = a\xi dt + b\xi dw$ и начальному условию $\xi(0) = \xi_0$ в моменты t_1 и t_2 проходят через "вороты" $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$.

..... подготовка к анализу рынка

5. Сформулируйте коротко основные принципы подхо-

уравнения Колмогорова) уравнения на

6. Выведите (из обратного уравнения) математическое ожидание процесса $\bar{E}, d\bar{E} = A \bar{E} dt + \sigma dw$, где A, σ - матрицы $(n \times n), \bar{E} = (\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n)$.

ДЛЯ ЧЛЕНОВ ПЕНСИОННОГО

7. Дайте вероятностную интерпретацию следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta U(x, y) = 0$ в Ω , $U|_{\partial\Omega} = x^2 y$, $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$

управления Беллмана, соответствующее

$$h_1 + h_2 = 1, \quad |h_1| < 1, \quad |h_2| < 1.$$

12. Содержание статьи 12 статьи 119 Конституции РФ

начальный момент, T – время погашения, σ – волатильность цены, K – гарантированная стоимость покупки, тренд отсутствует.

1. Определите винеровский процесс и докажите, что траектории винеровского процесса не дифференцируемы с вероятностью 1 в точке 0.

2. Пусть $d\xi = a\xi dt + b\xi^2 dw$. Положим $\rho(t) = M\xi^2(t)$. Докажите, что $\rho(t) = \rho(0)\exp((2a - b^2)t)$.

3. Дайте определение условного математического ожидания случайной величины относительно σ -алгебры событий F_s , $M(\xi|F_s)$. Докажите, что если ξ не зависит от F_s , то $M(\xi|F_s) = M(\xi)$.

4. Напишите формулу для функции плотности распределения процесса $P_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$, задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением $d\xi = adt + \sigma dw$ с начальным условием $\xi(0) = x_0$.

5. Опишите подход к определению индекса портфеля ценных бумаг, основанный на анализе двустороннего потока платежей (для портфеля ГКО).

6. Сформулируйте (без доказательства) теорему Вентцеля-Фрейдлина о больших отклонениях.

7. Дайте вероятностную интерпретацию следующей задачи Коши для параболического уравнения (на плоскости (x, y)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} (\sin x)(\sin y), \quad u|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

8. Определите значения следующих экономических терминов: "акция", "уровень риска портфеля", "средняя ставка межбанковского кредита", "бета i-ого вклада".

9. Инвестиционный портфель состоит из двух активов с ценами S_1 и S_2 в "доллах" h_1 и h_2 . Начальный капитал портфеля V_0 , поведение цен на активы описывается стохастическими уравнениями $dS_1 = S_1[(a+b \cdot r)dt]$, $dS_2 = S_2[(c+d \cdot r)dt + \sigma dw]$, $dr = \frac{1}{T}(b-r)dt + \lambda dw_1$, r - "внешний экономический фактор". Напишите уравнение

Беллмана, соответствующее задаче максимизации капитала портфеля в момент времени T , причем для "долей" h_1 и h_2 выполнено только ограничение $h_1 + h_2 = 1$.

1. Сформулируйте задачу об оптимальном марковском управлении диффузионным процессом, заданным стохастическим дифференциальным уравнением. Выведите уравнение Беллмана.

2. Пусть процессы ξ_1, ξ_2 - решения стохастических

дифференциальных уравнений $d\xi_i = a_i(t)dt + b_i(t)dw(t)$, $d\xi_2 = a_2(t)dt + b_2(t)dw(t)$. Тогда

$$d(\xi_1 \xi_2)(t) = \xi_1(t)d\xi_2(t) + \xi_2(t)d\xi_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt. \text{ (Доказать.)}$$

3. Дайте определение условного математического ожидания случайной величины ξ относительно σ -алгебры событий F , $M(\xi|F)$. Докажите правило повторного математического ожидания: $M(\xi) = M[M(\xi|F)]$.

4. Вычислите вероятность события, состоящего в том, что траектории процесса $\xi(t)$, удовлетворяющие стохастическому дифференциальному уравнению $d\xi = a\xi dt + b dw$ иначальному условию $\xi(0)=0$ в моменты времени t_1 и t_2 проходят через "ворота" $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$:



5. Опишите коротко, что такое "фундаментальный анализ" рынка ценных бумаг и что такое "функционалы недооценённости".

6. Пусть $w(t)$ -стандартный винеровский процесс. Докажите "правило удвоенного нормального закона": $P\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) > x\} = 2P\{w(t) > x\}$.

7. Дайте вероятностную интерпретацию следующей задачи Коши для параболического уравнения (на плоскости):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} + u + e^{-(x^2+y^2)}, \quad u|_{t=0} = \sin(x^2 + y^2).$$

8. Определите значения следующих экономических терминов: "арбитражная сделка", "опцион".

9. Выведите формулу для "средней" справедливой цены опциона, аналогичную формуле Башелье, если в законе изменения цены $dS = S(\mu dt + \sigma dw)$ присутствует "тренд" μ .