ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации
Лихоманенко Татьяны Николаевны
"Исследование решений неклассических краевых задач
для уравнений смешанного типа",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация посвящена решению неклассических краевых задач для уравнений смешанного типа и изучению базисных свойств систем функций, с помощью которых выписываются решения указанных задач в виде биортогональных рядов или в интегральном виде. Исследования в данной области являются актуальными, так как многие задачи математической физики, связанные с описанием физических процессов, сводятся к проблемам, рассматриваемым в настоящей работе.

Уравнения смешанного типа – сравнительно новый раздел теории дифференциальных уравнений в частных производных, первые важные результаты в этом направлении были получены Ф. Трикоми, С. Геллерстедтом и Ф.И. Франклем. Современное развитие теории для уравнений смешанного типа представлено в работах М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, И.Н. Векуа, К. Моравец, А.М. Нахушева, М.М. Смирнова и других математиков. В последней четверти прошлого века было начато исследование указанных уравнений спектральными методами. В работах Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева, Т.Ш. Кальменова, К.Б. Сабитова и их учеников исследовались спектр и собственные функции соответствующих краевых задач, которые, как правило, являются несамосопряженными. Их решение приводит к одномерным спектральным задачам и, в частности, к необходимости изучения вопросов полноты, минимальности, базисности систем экспонент и тригонометрических функций, которым были посвящены работы Е.И. Моисеева, А.М. Седлецкого и других математиков.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор предшествующих работ и излагается основное содержание диссертации.

В первой главе диссертации исследуются двухсерийные тригонометрические системы

$$\{\cos 4n\theta\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{\sin[4(n+\beta/2)\theta+\gamma/2]\}_{n=1}^{\infty}, \tag{1}$$

зависящие от параметров β и γ. Доказано, что при выполнении некоторых условий на β и γ система функций (1) образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi/2)$, также изучены вопросы полноты и минимальности. Полученные результаты перенесены на более общие тригонометрические системы функций. Установлены равномерные оценки для построенной в явном виде системы функций, биортогонально сопряженной к системе (1). В конце главы 1 при помощи биортогонального ряда по системе функций типа (1) построено интегральное представление для решения задачи Франкля в специальной области.

Во второй главе изучаются уравнения смешанного типа со спектральным параметром и наклонной линией изменения типа. В параграфе 1 рассматривается задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральными параметрами μ^2 и $\tilde{\mu}^2$ для эллиптической и гиперболической областей соответственно

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)+\mu^2 u(x,y)=0$$

в эллиптической части D^+ и

$$u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)+\tilde{\mu}^2 u(x,y)=0$$

в гиперболической части D^-, где линия изменения типа наклонена под углом α ($|\alpha|<\pi/4$) к оси Ox. Решение указанной задачи $u(x,y)$ должно также удовлетворять заданным краевым условиям и условиям сопряжения на линии изменения типа. Установлено, что функция $u(x,y)$ или собственная функция задачи Трикоми удовлетворяет найденному в работе интегральному условию связи на линии изменения типа. При условии $\mu=\tilde{\mu}\sqrt{\cos 2\alpha}$ доказывается, что собственные функции рассматриваемой задачи Трикоми, выписываемые в явном виде, образуют базис Рисса в пространстве $L_2(D^+)$.

Во втором и третьем параграфах главы 2 изучается задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральными параметрами μ^2, $\tilde{\mu}_1^2$ и $\tilde{\mu}_2^2$:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)+\mu^2 u(x,y)=0$$

в эллиптической части D^+,

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + \tilde{\mu}_1^2 u(x,y) = 0$$

в гиперболической части D_1^-,

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + \tilde{\mu}_2^2 u(x,y) = 0$$

в гиперболической части D_2^-. Искомая функция $u(x,y)$ должна также удовлетворять начальным условиям и условиям сопряжения на линиях изменения типа по аналогии с задачей Трикоми. Основным результатом этого раздела диссертации является доказательство, что собственные функции рассматриваемой задачи Геллерстедта, которые выписаны явно, образуют базис Рисса в пространстве $L_2(D^+)$.

В третьей главе исследуется нелокальные краевые задачи для уравнения

$$u_{xx} + sgn\, y\, u_{yy} = 0$$

на плоскости и уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + sgn\, t\, u_{tt} = 0$$

в трехмерной цилиндрической области, в которых значения функции на границе в гиперболической части связаны со значениями функции на линии изменения типа. Для рассматриваемых задач доказаны теоремы корректности, показано, что при некоторых значениях параметра для однозначной разрешимости необходимо наличие счетного числа условий ортогональности на правую часть нелокального условия.

В работе нет сколько-нибудь значительных недостатков, однако, можно сделать следующие замечания. На с. 10 автор формулирует собственное определение базиса Рисса, которое эквивалентно общепринятому, но является неудачным с методической точки зрения, вместо $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис в H следовало бы написать $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в H. На с. 75 в формулировке теоремы 2.9 в слове "эллиптичности" допущена опечатка.

Все результаты диссертации являются новыми и строго математически доказаны. Отмеченные недочеты носят чисто редакционный характер и не влияют на положительную оценку работы. Основные результаты опубликованы в журналах из списка ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации Т.Н. Лихоманенко могут найти применение в исследованиях, проводимых в Московском, Белгородском, Воронежском госуниверситетах, в институте прикладной математики и автоматики Кабардино-Балкарского научного центра РАН и других научных и учебных учреждениях.

На основании изложенного считаю, что диссертация Т.Н. Лихоманенко "Исследование решений неклассических краевых задач для уравнений смешанного типа" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, безусловно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Доктор физико-математических наук А.С. Макин
профессор

Подпись А.С. Макина заверяю Н.В. Милованова
Ученый секретарь Ученого Совета МИРЭА