

Символическая логика *Symbolic Logic*

Д.В. ЗАЙЦЕВ

Рассуждения по модулю I. Логика невыводимости*

Дмитрий Владимирович Зайцев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.

E-mail: zaitsev@philos.msu.ru

Аннотация: Целью данной работы является обеспечение возможности формализации одного из вариантов рассуждений по модулю, в котором заключение следует из множества посылок и множества дополнительных условий (модуля), но не следует из этих множеств по отдельности. Будучи построена, такая логика, во-первых, позволит описать важные типы правдоподобных аргументативных рассуждений, во-вторых, представляет собой интересный пример немонотонной логики.

Для решения поставленной задачи предлагается на первом этапе формализовать отношение невыводимости между множеством посылок и заключением в виде системы своеобразных невыводимостей. В статье сначала семантически характеризуется такая логика. Затем строится соответствующее исчисление и доказывается его семантическая адекватность. Получившаяся система обладает рядом интересных свойств. В ней больше нет стандартных парадоксов следования, но их заменили новые парадоксы: «противоречие следует из любой выполнимой формулы», «закон не следует не из чего». Для аксиматизации потребовалось существенно модифицировать понятие подстановки формулы на место переменной так, чтобы сохранить невыводимость.

Дальнейшие перспективы работы в этом направлении связаны с построением семейства логик, в которых комплексное отношение выводимости будет включать невыводимость как свою составную часть.

Ключевые слова: рассуждения по модулю, невыводимость, немонотонность, формальная аргументация

Для цитирования: Зайцев Д.В. Рассуждения по модулю I. Логика невыводимости // Логические исследования / Logical Investigations. 2024. Т. 30. № 1. С. 11–26. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-1-11-26

* Исследование поддержано РНФ, проект № 20-18-00158 «Формальная философия аргументации и комплексная методология поиска и отбора решений спора», реализуемый в Санкт-Петербургском государственном университете. Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение работы и полезные советы.

1. Введение. Мотивация

Несколько лет назад, в работе [Зайцев, Беликов, 2020] был анонсирован новый подход к формализации аргументативных рассуждений. В основу этого подхода авторы положили так называемое «рассуждение по модулю» – особый тип модифицируемых рассуждений, в которых заключение следует из множества посылок при условии принятия определенных дополнительных условий (допущений, соглашений и т.п.). Идея подобного рода рассуждений встречается в литературе, а сами формализмы известны также как рассуждения на основе допущений или предпосылок (assumption-based argumentation). Укажу лишь наиболее важные источники: [Gärdenfors, Makinson, 1994; Makinson, 2003; Toni, 2014; Borg, 2020].

В упомянутой выше работе [Зайцев, Беликов, 2020] представлен особый оригинальный вариант таких рассуждений: заключение следует из посылок с использованием дополнительных условий, е.т.е. заключение классически следует из посылок и дополнительного условия («модуля»), но не следует из посылок и модуля по отдельности.

В качестве примера рассмотрим хорошо известное рассуждение по схеме Modus Ponens: $p \supset q \models_p q$. Заключение, совпадающее с консеквентом имплицативной формулы, нельзя получить ни из имплицативной посылки, ни из антецедента импликации по отдельности, для этого требуются обе посылки.

В общем виде семантически отношение следования по модулю определяется следующим образом.

Определение 1. $\Gamma \models_{\Delta} T \Leftrightarrow \Gamma, \Delta \models T$, и $\Gamma \not\models T$, и $\Delta \not\models T$.

Интересная особенность отношения следования по модулю состоит в том, что оно является немонотонным. Вернемся к примеру с Modus Ponens: расширение множества посылок за счет включения в него антецедента импликации, как и расширение множества допущений («модуля») включением в него самой имплицативной формулы, явным образом нарушают условия определяющей части и, таким образом, препятствуют получению $p \supset q, p \models_p q$ и $p \supset q \models_{p, p \supset q} q$.

Несмотря на то, что приведенное определение следования по модулю является достаточно прозрачным с семантической точки зрения, очевидная проблема с его формальной экспликацией состоит в отсутствии стандартной формализации отношения невыводимости, соответствующего неследованию (условимся далее называть это отношение «н-выводимостью» и обозначать символом $\not\models$, используя при необходимости символ $\not\models$ для неследования).

Таким образом, описанный подход содержит в себе своеобразный двойной вызов для исследователя, решившего ему следовать: во-первых, необходимо формализовать отношение невыводимости, во-вторых, найти адекватную экспликацию отношения следования по модулю в виде соответствующего исчисления. Нижеследующая статья открывает цикл работ по исследованию отношения следования по модулю и будет посвящена преимущественно построению логики невыводимости. В случае успешного решения этой проблемы появляется возможность двигаться следующим способом: (I) представить отношение $\Gamma \vdash_{\Delta} A$ как сокращение для $\Gamma, \Delta \vdash A$ и $\Gamma \vdash A$ и $\Delta \vdash A$. Альтернативный вариант (II) состоит в том, чтобы непосредственно аксиоматизировать трехместное отношение выводимости. В данной статье я исследую возможность осуществления первого варианта, стремясь обеспечить базис для его реализации в виде исчисления невыводимости. Само по себе построение формальной системы, эксплицирующей понятие невыводимости, уже представляет собой крайне интересную творческую задачу.

Общий план работы таков. В следующем параграфе акцент будет сделан на семантических свойствах несследования, существенно влияющих на способ аксиоматизации. В разделе 3 строится исчисление невыводимостей, а в следующем за ним доказывается семантическая адекватность построенного исчисления. В 5-м разделе обсуждается возможность формализации логики с ограниченной (так называемой рациональной) немонотонностью. Заключение традиционно подводит итоги исследования и намечает дальнейшие направления работы.

2. Неследование, семантические соображения

Будем исходить из следующих предпосылок: во-первых, речь пойдет о классической логике, во-вторых, отношение несследования (и, далее, невыводимости) задается между конечным множеством формул (посылок) и формулой (заключением), в-третьих, ограничим рассмотрение пропозициональной логикой.

Язык $\mathcal{L}$ задается обычным образом: $A ::= p \mid \neg A \mid A \wedge A \mid A \vee A$.

Условия истинности для формул стандартные.

Определение 2.

- (1) $v(A \wedge B) = \mathbf{и} \Leftrightarrow v(A) = v(B) = \mathbf{и}$,
 $v(A \wedge B) = \mathbf{л} \Leftrightarrow v(A) = \mathbf{л} \text{ или } v(B) = \mathbf{л}$;
- (2) $v(A \vee B) = \mathbf{и} \Leftrightarrow v(A) = \mathbf{и} \text{ или } v(B) = \mathbf{и}$,
 $v(A \vee B) = \mathbf{л} \Leftrightarrow v(A) = v(B) = \mathbf{л}$;

$$(3) \quad v(\neg A) = \mathbf{и} \Leftrightarrow v(A) = \mathbf{л}, \\ v(\neg A) = \mathbf{л} \Leftrightarrow v(A) = \mathbf{и}.$$

Отношение неследования (далее – н-следования для избегания парадоксальных интерпретаций) представляет собой в точности отсутствие классического отношения следования: из множества Γ не следует заключение A , если существует приписывание, при котором все формулы из Γ истинны, а формула A ложна.

Определение 3. $\Gamma \approx A \Leftrightarrow \exists v. \forall C \in \Gamma. v(C) = \mathbf{и} \text{ и } v(A) = \mathbf{л}.$

С семантической точки зрения построение логики отбрасывания следований не вызывает особых затруднений, но ведет к интересным наблюдениям и непривычным заключениям. В силу этого представляется оправданным последовать примеру старомодных статей по логике и привести список некоторых валидных и невалидных утверждений о н-следовании.

Например, следующие, весьма странные, на первый взгляд, утверждения о неследовании будут валидны:

$$p \approx q; \quad p \approx \neg p; \quad p \approx \neg q \wedge q; \quad p \approx p \wedge q; \quad p \vee q \approx p; \quad p \vee \neg p \approx q.$$

При этом также очевидно, что утверждения, получаемые из приведенных выше стандартной подстановкой (формул вместо пропозициональных переменных), уже не будут верны:

$$p \approx p; \quad p \wedge q \approx p; \quad p \wedge \neg p \approx q; \quad p \approx q \vee \neg q.$$

Кроме того, не действуют ни в какой форме принципы рефлексивности и транзитивности. Зато очевидно верна контрапозиция. Пусть из формулы A н-следует формула B , то есть существует приписывание, при котором формула A истинна, а формула B ложна. Тогда при этом же приписывании формула $\neg B$ истинна, а формула $\neg A$ – ложна, то есть из $\neg B$ н-следует $\neg A$.

Первое и достаточно очевидное обобщение этих наблюдений состоит в том, что в развиваемой пока семантической логике больше нет стандартных парадоксов следования. Зато на смену им появляются свои парадоксы: «противоречие следует из любого неложного высказывания – *contradictio sequitur ex aliqua non falsa propositio*», «закон не следует не из чего – *nihil ex quo veritas*», «из закона следует любое опровержимое высказывание».

Уместно отметить, что отношение неследования является немонотонным: например, $p \approx q$, но неверно, что $p, q \approx q$.

Также очевидно, что при построении соответствующего исчисления необходимо будет, во-первых, явным образом использовать правило подстановки, и, во-вторых, модифицировать его так, чтобы избежать нежелательных следствий.

3. Исчисление н-выводимостей. Логика LUD

Аксиоматизация системы н-выводимостей **LUD** (*Logic of Undeducibility*) содержит следующие (недедуктивные) постулаты.

LUD

$$(u1) \ p \vdash \neg p$$

$$(u3) \ p \wedge q \vdash \neg p$$

$$(u5) \ p, q \vdash \neg(p \wedge q)$$

$$(u7) \ p \vee q \vdash \neg p$$

$$(u9) \ p \vee q \vdash p$$

$$(ur1) \frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A}$$

$$(ur3) \frac{\Gamma \vdash A \vee A}{\Gamma \vdash A}$$

$$(ur5) \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

$$(ur7) \frac{\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)}{\Gamma \vdash \neg A \vee \neg B}$$

$$(ur9) \frac{\Gamma \vdash \neg(A \vee B)}{\Gamma \vdash \neg A \wedge \neg B}$$

$$(ur11) \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

$$(ur13) \frac{\Gamma \vdash A \vee (B \wedge C)}{\Gamma \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

$$(ur15) \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma^* \vdash A^*}, \quad \text{где } \Gamma^*, A^* \text{ – результат правильной подстановки.}$$

$$(u2) \ p \vdash q$$

$$(u4) \ p \wedge q \vdash \neg q$$

$$(u6) \ p \vdash q \wedge \neg q$$

$$(u8) \ p \vee q \vdash \neg q$$

$$(u10) \ p \vee q \vdash q$$

$$(ur2) \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg \neg A}$$

$$(ur4) \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee A}$$

$$(ur6) \frac{\Gamma, \Delta \vdash A}{\Gamma \vdash A}$$

$$(ur8) \frac{\Gamma \vdash \neg A \vee \neg B}{\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)}$$

$$(ur10) \frac{\Gamma \vdash \neg A \wedge \neg B}{\Gamma \vdash \neg(A \vee B)}$$

$$(ur12) \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, B, A \vdash C}$$

$$(ur14) \frac{A \vdash B}{\neg B \vdash \neg A}$$

Определение 4.

(Параллельная) подстановка формулы B вместо всех вхождений переменной p в формулы из Γ и формулу A называется правильной, если выполняются следующие условия:

1. Конъюнкция формул из Γ^* приводима к СДНФ;
2. Формула A^* приводима к СКНФ;

3. Существует элементарная конъюнкция в составе СДНФ формул из Γ^* и элементарная дизъюнкция в составе СКНФ A^* , не имеющие общего члена.

Смысл введенных ограничений на применение правила подстановки состоит в избежании получения невалидных н-выводимостей. Другими словами, нельзя допустить, чтобы в результате подстановки отношение невыводимости заменилось на отношение классической выводимости – подстановка должна сохранять н-выводимость. Все верифицируемые в классической логике утверждения о выводимости можно разделить на две группы: парадоксальные утверждения о выводимости типа $p \wedge \neg p \vdash q$ и $p \vdash q \vee \neg q$ и релевантные выводимости, соответствующие критерию тавтологического следования, как, например, $p \vdash p$ и $p \wedge q \vdash p$. Условия 1 и 2 предохраняют от парадоксов следования, поскольку СДНФ существует только для выполнимых формул, а СКНФ – для опровержимых. В свою очередь условие 3 является отрицанием критерия тавтологического следования (см. [Anderson, Belnap, 1975]), что позволяет отбраковывать релевантные (непарадоксальные) выводимости.

В приведенной аксиоматизации, по сути дела, правила $ur1 - ur4, ur7 - ur10$ можно было бы заменить универсальным правилом: если $\Gamma \vdash A$ и $A \dashv\vdash B$ (в классическом смысле), то $\Gamma \vdash B$.

Интересно отметить, что правило $ur6$, двойственное уточнению, заменяет его в аксиоматизации н-выводимости.

Приведем обоснование двух полезных выводимостей.

- | | | |
|------|--------------------------------------|---------------|
| $t1$ | $\neg p \vdash p \wedge q$ | |
| 1. | $p \vdash \neg p$ | (u1) |
| 2. | $\neg p \vdash \neg\neg p$ | подстановка:1 |
| 3. | $\neg p \vdash p$ | (ur1):2 |
| 4. | $p \vdash q$ | (u2) |
| 5. | $\neg p \vdash q$ | подстановка:4 |
| 6. | $\neg p \vdash p \wedge q$ | (ur5):3, 5 |
| $t2$ | $\neg(p \wedge q) \vdash p$ | |
| 1. | $\neg p \vdash p \wedge q$ | (t1) |
| 2. | $\neg(p \wedge q) \vdash \neg\neg p$ | (ur14):1 |
| 3. | $\neg(p \wedge q) \vdash p$ | (ur1):2 |

4. Семантическая адекватность

Демонстрация семантической непротиворечивости (корректности) не представляет большого труда. Рассмотрим несколько примеров. Сохран-

ность н-следования для выводимостей $u1 - u10$ очевидна на основании Определений 2 и 3.

$\Rightarrow (u3)$ Предположим, $v(p \wedge q) = \mathbf{i}$. Следовательно, $v(p) = \mathbf{i}$ и $v(\neg p) = \mathbf{l}$.

Примерно также обстоит дело с правилами $ur1 - ur14$.

$\Rightarrow (ur1)$ Предположим, $\Gamma \approx A$, то есть $\exists v. \forall C \in \Gamma. v(C) = \mathbf{i}$ и $v(A) = \mathbf{l}$. Следовательно, $v(\neg \neg A) = \mathbf{l}$, и $\Gamma \approx \neg \neg A$.

Для верификации правила $ur15$ достаточно допустить, что $\Gamma \approx A$ и неверно, что $\Gamma^* \approx A^*$. В силу условий 1 и 2 из определения правильной подстановки второе допущение означает, что между Γ^* и A^* не существует отношение непарадоксальной выводимости. Но такое отношение должно удовлетворять критерию тавтологического следования, что противоречит условию 3.

Для доказательства полноты будет использован модифицированный метод Генкина, применяемый при аксиоматизации исчислений выводимости. Предположим, $\Gamma \approx A$ и неверно, что $\Gamma \vdash A$. Далее, задав каноническую оценку в терминах теорий и используя аналог Леммы Линденбаума, приходим к противоречию.

В случае системы классических выводимостей доказательство полноты по сути означает установление соответствия $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \forall \alpha. \Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow A \in \alpha$, где α – классическая (нормальная) теория. Импликация слева направо – это условие замкнутости относительно выводимости, которое постулируется для классических теорий, а импликация справа налево равносильна формулировке Леммы Линденбаума: $\Gamma \not\vdash A \Rightarrow \exists \alpha. \Gamma \subseteq \alpha$ и $A \notin \alpha$.

В случае н-выводимости логики **LUd** искомое соответствие должно иметь вид $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \exists \alpha. \Gamma \subseteq \alpha$ и $A \notin \alpha$. Соответствующие изменения претерпевают и свойство замкнутости теорий, и формулировка леммы, замещающей Лемму Линденбаума.

Итак, пусть теория α удовлетворяет свойству нормальности:

(1) $\neg A \in \alpha \Leftrightarrow A \notin \alpha$ и дополнительно свойствам,

(2) $(\Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow A \in \alpha) \Rightarrow \Gamma \approx A$ и

(3) $\Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash A$ или $\Gamma \vdash \neg A$.

Последнее свойство нужно для доказательства леммы, замещающей Лемму Линденбаума. Его принятие представляется вполне очевидным. Наличие теории, которой принадлежит Γ , в семантической терминологии означает наличие приписывания, при котором все формулы из Γ истинны. Принимая во внимание трактовку н-выводимости (и н-следования) как

отсутствие классической выводимости (и классического следования), становится очевидно, что при этом приписывании для произвольной формулы A будет верно, что ложна она или ее отрицание.

Лемма 1. Пусть α – теория, удовлетворяющая свойствам (1), (2) и (3), и пусть каноническая оценка v_c задана следующим образом:

$$v_c(p) = \mathbf{и} \Leftrightarrow p \in \alpha \text{ и}$$

$$v_c(p) = \mathbf{л} \Leftrightarrow \neg p \in \alpha.$$

Тогда каноническая оценка удовлетворяет Определению 2 для произвольной формулы.

Доказательство. Используется стандартный метод доказательства леммы о канонической оценке. Ограничимся рассмотрением негативных и конъюнктивных формул, поскольку дизъюнкция выражима обычным образом через конъюнкцию и отрицание.

$$A ::= \neg B$$

Начнем со случая истинности.

$$v_c(\neg B) = \mathbf{и} \Leftrightarrow v_c(B) = \mathbf{л} \quad \text{по Определению 2}$$

$$v_c(B) = \mathbf{л} \Leftrightarrow \neg B \in \alpha \quad \text{по индуктивному допущению}$$

Случай ложности.

$$v_c(\neg B) = \mathbf{л} \Leftrightarrow v_c(B) = \mathbf{и} \quad \text{по Определению 2}$$

$$v_c(B) = \mathbf{и} \Leftrightarrow B \in \alpha \quad \text{по индуктивному допущению}$$

$$B \in \alpha \Leftrightarrow \neg B \notin \alpha \quad \text{по свойству (1) теории}$$

$$\neg B \notin \alpha \Leftrightarrow \neg \neg B \in \alpha \quad \text{по свойству (1) теории}$$

$$A ::= B \wedge C$$

Рассмотрим случай истинности.

$\Rightarrow$

$$v_c(B \wedge C) = \mathbf{и} \Leftrightarrow v_c(B) = v_c(C) = \mathbf{и} \quad \text{по Определению 2}$$

$$B \in \alpha \text{ и } C \in \alpha \quad \text{по индуктивному допущению}$$

$$B \in \alpha \text{ и } C \in \alpha \Rightarrow \{B, C\} \subseteq \alpha \quad \text{по определению множества}$$

$$B \wedge C \notin \alpha \quad \text{допущение от противного}$$

$$\neg(B \wedge C) \in \alpha \quad \text{по свойству (1) теории}$$

$$\{B, C\} \subseteq \alpha \Rightarrow \neg(B \wedge C) \in \alpha \quad \text{введение импликации}$$

$$B, C \not\models \neg(B \wedge C) \quad \text{по свойству теории (2)}$$

Противоречие с (и5)

←

$B \wedge C \in \alpha$	допущение
$B \notin \alpha$ или $C \notin \alpha$	допущение от противного
$B \notin \alpha$	допущение
$\neg B \in \alpha$	по свойству теории (1)
$B \wedge C \subseteq \alpha \Rightarrow \neg B \in \alpha$	введение импликации
$B \wedge C \not\vdash \neg B$	по свойству теории (2)
	Противоречие с (u3)
Аналогично для случая $C \notin \alpha$	Противоречие с (u4)

Доказательство для случая ложности получается следующим образом.

⇒

$v_c(B \wedge C) = \perp \Leftrightarrow v_c(B) = \perp$ или $v_c(C) = \perp$	по Определению 2
$v_c(B) = \perp$	допущение
$\neg B \in \alpha$	по индуктивному допущению
$\neg(B \wedge C) \notin \alpha$	допущение от противного
$B \wedge C \in \alpha$	по свойству (1) теории
$\neg B \in \alpha \Rightarrow B \wedge C \in \alpha$	введение импликации
$\neg B \not\vdash B \wedge C$	по свойству теории (2)
	Противоречие с (t1)

Аналогично для случая $v_c(C) = \perp$

←

$\neg(B \wedge C) \in \alpha$	допущение
$B \in \alpha$	допущение от противного
$\neg(B \wedge C) \subseteq \alpha \Rightarrow B \in \alpha$	введение импликации
$\neg(B \wedge C) \not\vdash B$	по свойству теории (2)
	Противоречие с (t2)
$B \notin \alpha$	введение отрицания
$\neg B \in \alpha$	по свойству теории (1)
$v_c(B) = \perp$	по индуктивному допущению
$v_c(B \wedge C) = \perp$	по Определению 2

■

Теперь перейдем к лемме, замещающей Лемму Линденбаума (Lindenbaum Lemma Stand-in – **LLS**)

Лемма 2 (LLS). Пусть $\Gamma \not\vdash A$, тогда для всякой теории α будет верно $\Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow A \in \alpha$.

Доказательство.

Примем исходные допущения: пусть

1. $\Gamma \not\approx A$,
2. $\Gamma \subseteq \alpha$ и
3. $A \notin \alpha$.

$\Gamma \vdash \neg A$, из 1. и 2. по свойству (3).

Из 3. по свойству (1) получаем $\neg A \in \alpha$.

Соответственно, на основании классической выводимости будет иметь место $\Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow \neg A \in \alpha$.

Отсюда по свойству (2), применяя исключение импликации, получаем $\Gamma \not\approx \neg A$.

Таким образом, имеет место противоречие, что позволяет отрицать последнее допущение 3. – $A \in \alpha$.

Введение импликации и последующее введение квантора общности позволяют получить $\forall \alpha (\Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow A \in \alpha)$. ■

Теорема 1 (Семантическая полнота). Для любых $\Gamma, A \in \mathcal{L} : \Gamma \approx A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Доказательство. Построим рассуждение по контрапозиции.

- | | |
|--|--|
| 1. $\Gamma \not\approx A$ | допущение |
| 2. $\forall \alpha (\Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow A \in \alpha)$ | из 1. по лемме 2 |
| 3. $\Gamma \subseteq \alpha \Rightarrow A \in \alpha$ | из 2. удалением $\forall$ |
| 4. $\forall C \in \Gamma. v_c(C) = \mathbf{i} \Rightarrow v_c(A) = \mathbf{i}$ | из 3. по определению канонической оценки |
| 5. $\forall v (\forall C \in \Gamma. v(C) = \mathbf{i} \Rightarrow v(A) = \mathbf{i})$ | из 4. введением $\forall$ |
| 6. $\Gamma \not\approx A$ | из 5. на основании определения 3 |

■

5. Рассуждения по модулю и рациональная монотонность

К немонотонной логике можно идти различными путями, построение логики рассуждений по модулю – это далеко не единственная возможность. Более традиционный путь лежит через ограничение свойства монотонности. Наиболее сильный вариант такого ограничения, так называемая рациональная монотонность (Rational Monotony, см. например: [Strasser, Antonelli, 2019]), предполагает, что расширение множества посылок возможно только при соблюдении определенного условия, обес-

печивающего непротиворечивость такого расширения. При этом в самой формулировке этого свойства явным образом присутствует невыводимость:

$$\frac{\Gamma \Vdash B \text{ и } \Gamma \nVdash \neg A}{\Gamma, A \Vdash B},$$

где $\Vdash$ – особое отношение модифицируемой выводимости, часто называемое супра-выводимостью, «над-выводимостью».

Применительно к построенной логике н-выводимости, свойство рациональной монотонности можно было бы несколько модифицировать, сохранив его смысл. Для этого сначала введем отношение супра-выводимости следующим образом:

Определение 5. $\Gamma \Vdash A \Leftrightarrow \Gamma \vdash A \text{ и } \Gamma \not\sim \neg A$, где $\vdash$ отношение классической выводимости.

Очевидно, что множество посылок обоснованной супра-выводимости должно быть классически непротиворечивым.

Теперь свойство модифицированной рациональной монотонности можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\Gamma \Vdash B \text{ и } \Gamma, A \not\sim \neg B}{\Gamma, A \Vdash B}.$$

Обоснование этого свойства вытекает из определения супра-выводимости. $\Gamma \Vdash B$ означает, что из Γ классически выводимо B и, следовательно, $\Gamma, A \vdash B$. В сочетании со второй посылкой это обеспечивает утверждение о супра-выводимости в заключении. С семантической точки зрения присутствие утверждения о невыводимости (неследовании) в определяющей части минимально меняет определение следования:

Определение 6. $\Gamma \models A \Leftrightarrow \forall v(\forall C \in \Gamma. v(C) = \mathbf{i} \Rightarrow v(A) = \mathbf{i}) \text{ и } \exists v. \forall C \in \Gamma. v(C) = \mathbf{i}$.

Как показывают Определения 5 и 6, предположительная логика ограниченной монотонности будет очень близка к классической. Важными отличиями станут отсутствие уточнения (его заменит рациональная монотонность), контрапозиции, при сохранении законов ДеМоргана, и принципа «из противоречия следует что угодно» при сохранении прямого удаления дизъюнкции.

Последние две особенности выглядят непривычно. Обычно контрапозиция оказывается допустимым правилом в присутствии законов ДеМоргана, в данном случае этого не происходит. Точно так же в классическом случае «из противоречия следует что угодно» и прямое удаление дизъюнкции равносильны, но не в этот раз. Это объясняется тем, что для получения парадоксального следствия из противоречия с использованием удаления дизъюнкции необходим принцип исключения конъюнкции, однако в логике ограниченной монотонности этот принцип в виде схемы выводимости не проходит. Из $A \wedge \neg A$ не только не следует произвольная формула, из противоречия не следует ничего, даже A . Таким образом, насколько мне известно, предполагаемая логика ограниченной монотонности может стать первой формальной теорией, в которой принцип прямого удаления дизъюнкции отделяется от принципа «из противоречия следует что угодно» и тем самым «восстанавливается в правах» как схема вполне корректного, надежного рассуждения.

6. Заключение

Целью данной работы было обеспечить возможность эффективной формальной экспликации отношения выводимости по модулю на основе классической выводимости и невыводимости. Для этого нужно было построить систему невыводимости. Этот, казалось бы, промежуточный результат важен по целому ряду причин.

Во-первых, построенная логика невыводимости служит основой для формализации рассуждений по модулю. Это делает возможным реализацию заявленного во введении способа I представить отношение выводимости по модулю как сокращение для трех утверждений о выводимости:

Определение 7. $\Gamma \vdash_{\Delta} A \Leftrightarrow \Gamma, \Delta \vdash A$, и $\Gamma \vdash A$, и $\Delta \vdash A$.

По сути дела, в соответствии с приведенным определением и учитывая предложенную аксиоматизацию исчисления **LUd**, далее необходимо сформулировать систему классических выводимостей по принципу «множество–формула», формализующую отношение выводимости между множеством формул-посылок и формулой-заключением. Хорошо известна и тщательно изучена система **FDE**, аксиоматизирующая первоуровневое непарадоксальное (релевантное) отношение выводимости. Также хорошо известно, что добавление к постулатам этой системы парадоксальной выводимости («из противоречия следует что угодно» или принципа прямого исключения дизъюнкции, известного как дизъюнктивный силлогизм, и т.п.) ведет к системе классических выводимостей. Все это верно для выводимостей, построенных по принципу «формула–формула». Традиционно классическая

логика строится как аксиоматическое исчисление, формулировка системы выводимостей «множество–формула» обычно не рассматривается. В качестве примера такой системы можно взять логику, построенную в работе [Shramko et al., 2017] под названием **VCL**.

Таким образом, в соответствии с Определением 7, наличие классической выводимости из множества посылок и модуля обеспечивается в соответствии с постулатами системы **VCL**, а за невыводимость отвечает система **LUd**. Задача точной характеристики множества корректных выводимостей вида $\Gamma \vdash_{\Delta} A$ будет рассмотрена в следующей статье цикла.

Во-вторых, логика невыводимости сама по себе – важный объект исследования, она позволяет отбрасывать пары вида множество–формула, в которых из множества посылок не выводимо (в классическом смысле) заключение. Другими словами, это своеобразная логика фальсификации выводимостей. Интересно было бы рассмотреть варианты систем невыводимости для других, неклассических логик.

В-третьих, как было показано в предыдущем разделе, построенная система может быть использована для формализации немонотонного отношения выводимости. Очевидная и самая большая трудность в формализации модифицируемой выводимости состоит в проблеме экспликации невыводимости. Как представляется, построенная в этой статье логика позволит продвинуться в этом направлении.

В следующей (ближайшей) работе этого цикла предполагается реализовать описанную во введении возможность II, то есть построить логику рассуждений по модулю как формализацию трехместного отношения выводимости и (в идеале) показать эквивалентность двух вариантов построения исчисления рассуждений по модулю.

Литература

- Зайцев, Беликов, 2020 – *Зайцев Д.В., Беликов А.А.* Моделируя аргументацию: оценки и рассуждения // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2020. Т. 57. С. 13–24.
- Anderson, Belnap, 1975 – *Anderson A.R., Belnap N.D.* Entailment. The Logic of Relevance and Necessity, Vol. 1. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1975. 543 p.
- Borg, 2020 – *Borg A.* Assumptive sequent-based argumentation // IfCoLog Journal of Logics and their Applications. 2020. Vol. 7. № 3. P. 227–294.
- Gärdenfors, Makinson, 1994 – *Gärdenfors P., Makinson D.* Nonmonotonic inference based on expectations // Artificial Intelligence. 1994. Vol. 65. № 2. P. 197–245.
- Makinson, 2003 – *Makinson D.* Bridges between classical and nonmonotonic logic // Logic Journal of IGPL. 2003. Vol. 11. № 1. P. 69–96.

-
- Shramko et al., 2017 – *Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A.* First-degree entailment and its relatives // *Studia Logica*. 2017. Vol. 105. № 6. P. 1291–1317.
- Strasser, Antonelli, 2019 – *Strasser Ch., Antonelli G.A.* Non-monotonic Logic // *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.). URL: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-nonmonotonic> (дата обращения: 10.01.2024).
- Toni, 2014 – *Toni F.* A tutorial on assumption-based argumentation // *Argument and Computation*. 2014. Vol. 5. № 1. P. 89–117.

DMITRY V. ZAITSEV

Modulo reasoning I. Logic of undeducibility

Dmitry V. Zaitsev

Lomonosov Moscow State University,

27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.

E-mail: zaitsev@philos.msu.ru

Abstract: The aim of this paper is to formalize one of the variants of modulo reasoning, in which the conclusion follows from a set of premises and a set of additional assumptions (module), but does not follow from these sets separately. Being constructed, such logic, firstly, will allow describing important types of plausible argumentative reasoning, and secondly, it is an interesting example of defeasible logic, which satisfies the criterion of Rational Monotony.

In order to support this objective, it is proposed at the first stage to formalize the relation of non-derivability between the set of premises and the conclusion in the form of a system of peculiar undeducibility. In this paper, first I semantically characterize such logic. Then the corresponding calculus is constructed and its semantic adequacy is proved.

The resulting system has a number of interesting properties. It no longer contains the standard paradoxes of entailment, but they have been replaced by new paradoxes: “contradiction follows from any feasible formula”, “the law does not follow from nothing”. For axiomatization, it was necessary to significantly modify the concept of substituting a formula in place of a variable so as to preserve non-derivability.

Further prospects for work in this regard are related to the construction of a family of logics in which the complex relation of derivability will include non-derivability as its component part. One of such possible presumptive logics will be intended to formalize the so called Rational Monotony.

Keywords: modulo reasoning, undeducibility, non-monotonicity, formal argumentation

For citation: Zaitsev D.V. “Rassuzhdeniya po modulyu I. Logika nevyvodimosti” [Modulo reasoning I. Logic of undeducibility], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2024, Vol. 30, No. 1, pp. 11–26. DOI: 10.21146/2074-1472-2024-30-1-11-26 (In Russian)

Acknowledgements. The research was supported by the Russian Science Foundation, project № 20-18-00158 “Formal Philosophy of Argumentation and a Comprehensive Methodology for the Search and Selection of the Dispute Resolutions”, implemented at St. Petersburg State University. The author thanks the reviewer for the careful reading of the paper and useful advice.

References

Anderson, Belnap, 1975 – Anderson, A.R., Belnap, N.D. *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 1*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1975. 543 p.

- Borg, 2020 – Borg, A. “Assumptive sequent-based argumentation”, *IfCoLog Journal of Logics and their Applications*, 2020, Vol. 7, No. 3, pp. 227–294.
- Gärdenfors, Makinson, 1994 – Gärdenfors, P., Makinson, D. “Nonmonotonic inference based on expectations”, *Artificial Intelligence*, 1994, Vol. 65, No. 2, pp. 197–245.
- Makinson, 2003 – Makinson, D. “Bridges between classical and nonmonotonic logic”, *Logic Journal of IGPL*, 2003, Vol. 11, No. 1, pp. 69–96.
- Shramko et al., 2017 – Shramko, Y., Zaitsev, D., Belikov, A. “First-degree entailment and its relatives”, *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1291–1317.
- Strasser, Antonelli, 2019 – Strasser, Ch., Antonelli, G.A. “Non-monotonic Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.) [<https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-nonmonotonic>, accessed on 10.01.2024].
- Toni, 2014 – Toni, F. “A tutorial on assumption-based argumentation”, *Argument and Computation*, 2014, Vol. 5, No. 1, pp. 89–117.
- Zaitsev, Belikov, 2020 – Zaitsev, D.V., Belikov, A.A. “Modeliruya argumentatsiyu: otsenki i rassuzhdeniya” [Modelling argumentation: valuations and reasoning], *Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science*, 2020, Vol. 57, pp. 13–24.