

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

На правах рукописи

УДК 517.927.4; 517.958

Валовик Дмитрий Викторович

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОДНО- И ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ
ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛОЕ

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Пенза – 2014

Работа выполнена на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Пензенский государственный университет».

- Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Математика и суперкомпьютерное моделирование» ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет» **Смирнов Юрий Геннадьевич**
- Официальные оппоненты: **Карчевский Евгений Михайлович**, доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (г. Казань), профессор кафедры «Прикладная математика»;
- Тихонравов Александр Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» (г. Москва), директор Научно-исследовательского вычислительного центра (НИВЦ);
- Шестопалов Юрий Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики» (МГТУ МИРЭА) (г. Москва), ведущий научный сотрудник
- Ведущая организация: Институт вычислительной математики (ИВМ) РАН (г. Москва)

Защита состоится «15» октября 2014 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.43 ФГБОУ ВПО «Московский государственный университета им. М. В. Ломоносова» по адресу: г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в Научной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университета им. М. В. Ломоносова», а также на официальном сайте факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова: <http://cs.msu.ru> в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан «__» сентября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор

Захаров Евгений Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла возникают при изучении распространения электромагнитных волн в неоднородных волноведущих структурах. К таким задачам относится распространение поляризованных ТЕ- и/или ТМ-волн в плоских диэлектрических слоях и диэлектрических цилиндрических волноводах¹ (интерес представляют в том числе и многослойные структуры²).

Задачи для сред с постоянной диэлектрической проницаемостью (слой, круглый цилиндрический волновод и др.) являются классическими в электродинамике и хорошо изучены³. На базе результатов этой теории разработано и функционирует множество волноведущих устройств в технике СВЧ и оптике.

Начиная с 60-х гг. прошлого века после создания лазера стали активно изучаться электромагнитные явления в нелинейных средах.

Актуальность исследования задач о распространении ТЕ- и/или ТМ-волн в нелинейных волноведущих структурах обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, разработка новых методов исследования таких нелинейных задач на собственные значения актуальна с математической точки зрения, поскольку отсутствуют общие методы исследования указанного класса задач. В данной диссертации предложен общий метод исследования указанного класса задач. Эти нелинейные задачи сводятся к отысканию собственных значений (значений постоянной распространения), при которых волна может распространяться. Отметим, что рассматриваемые задачи являются нелинейными как по искомым функциям, так и по спектральному параметру (или паре спектральных параметров). Во-вторых, задачи с «простой» геометрией (плоские слои, круглые цилиндрические волноводы) имеют широкие практические приложения¹. Центральной проблемой здесь является определение условий существования постоянных распространения. Знание постоянных распространения необходимо при конструировании волноведущих структур.

¹**Ахмедиев Н. Н., Анкевич А.** Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. – М.: Физматлит, 2003; **Шен И. Р.** Принципы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1989; **Ponath H.-E., Stegeman G. I.** (editors) Modern problems in condensed matter sciences. Vol. 29. Nonlinear surface electromagnetic phenomena. – North-Holland: Elsevier Science Publishers, 1991.

²**Joannopoulos J. D. et al.** Photonic Crystals. Molding the flow of light. – Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2008; **Lourtioz J.-M. et al.** Photonic Crystals. Towards nanoscale photonic devices. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

³**Адамс М.** Введение в теорию оптических волноводов. – М.: Мир, 1984; **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988; **Стрэттон Дж. А.** Теория электромагнетизма. – Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1948.

В последние десятилетия предпринимались попытки обобщения известных результатов линейной теории на случай нелинейных задач. Первые фундаментальные результаты были получены В. М. Елеонским, Л. Г. Оганесьянцем и В. П. Силиным⁴. Первые математически строгие решения задач сопряжения на собственные значения для ТЕ-волн были получены в работах В. С. Серова, Ю. Г. Смирнова, Ю. В. Шестопалова, H.-W. Schürmann⁵. Также важные результаты получены в работах A. D. Boardman, D. N. Christodoulides, K. M. Leung⁶. Заметим однако, что общего метода исследования предложено не было, так же как не было получено общих результатов о существовании и локализации собственных значений.

Как известно, в линейной среде ТЕ- и ТМ-волны распространяются не взаимодействуя. Явление нелинейности приводит к новому, принципиально важному результату: существует режим распространения ТЕ- и ТМ-волн, в котором ТЕ- и ТМ-волны, распространяясь каждая со своей постоянной распространения и на своей частоте, взаимодействуют, но сохраняют структуру поверхностных волн, образуя связанную волну. Изучение связанных волн, с одной стороны, интересно с физической точки зрения, поскольку они описывают новые режимы распространения волн в волноведущих структурах, которые, в частности, могут оказаться полезными на практике. С другой стороны, возникает новый класс математических задач на собственные значения. Постоянные распространения в такой задаче существуют дискретными парами, что соответствует парным собственным значениям, или двухпараметрической задаче на собственные значения⁷. Математические методы исследования таких задач пока также не разработаны.

Взаимодействие между ТЕ- и ТМ-волнами в нелинейной волноведущей структуре с керровской нелинейностью рассматривалось как у нас⁸,

⁴Eleonskii P. N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. // Soviet Physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.

⁵Смирнов Ю. Г., Куприянова С. Н. // Жур. выч. мат. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1850–1860 ; Schürmann H.-W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V. // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 58, № 1. – P. 1040–1050 ; Schürmann H.-W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V. // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – V. 35, № 50. – P. 10789–10801 ; Schürmann H.-W., Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V. // Phys. Rev. E. – 2005. – V. 71, № 1. – P. 016614-1–10 ; Serov V. S., Shestopalov Yu. V., Schürmann H.-W. // Dokl. Math. – 1999. – V. 60. – P. 742–744 ; Smirnov Yu. G., Valovik D. V. // ISRN Math. Phys. – 2013. – Vol. 2013. – P. 1–7.

⁶См., например, Leung K. M. // Phys. Rev. B. – 1985. – Vol. 32, № 8. – P. 5093–5101 ; Joseph R. I., Christodoulides D. N. // Optics Letters. – 1987. – V. 12, № 10. – P. 826–828.

⁷Atkinson F. V., Mingarelli A. B. Multiparameter eigenvalue problems. Sturm – Liouville theory. – NW: CRC Press, 2011.

⁸Елеонский В. М., Оганесьянц Л. Г., Силин В. П. // Успехи физ. наук. – 1972. – Т. 107, № 3. – С. 516–518 ; Eleonskii V. M., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. // Soviet Phys. JETP. – 1973. – Vol. 36. № 2. – P. 282–285.

так и за рубежом⁹. В указанных работах отсутствуют результаты о разрешимости такой задачи. Использование предложенного в диссертации метода позволило доказать существование дискретных пар собственных значений, а также предсказать и теоретически обосновать существование нового волноводного режима для нелинейных волноведущих структур.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Основной целью диссертации является *разработка общего математического аппарата для исследования нелинейных одно- и двухпараметрических задач сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое.*

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Проведенные исследования опираются на методы решения краевых задач на собственные значения для уравнений в частных производных; классические результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений; методы теории интегральных уравнений; методы функционального анализа; численные методы исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ

Результаты работы являются новыми и получены автором лично. В работе предложен и развит новый математический подход, позволяющий исследовать нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла. Разработанный подход обладает большой теоретической общностью и позволяет исследовать широкий класс нелинейных задач.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Результаты диссертации состоят в следующем:

- предложен и развит новый математический подход – метод интегральных дисперсионных уравнений, позволяющий исследовать нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла;
- введены понятия собственного значения и парных (или связанных) собственных значений для некоторых классов нелинейных задач сопряжения на собственные значения;

⁹Boardman A. D., Twardowski T. // J. Opt. Soc. Am. B. – 1988. – Vol. 5, № 2. – P. 523–528 ; Boardman A. D., Twardowski T. // Phys. Rev. A. – 1989. – Vol. 39, № 5. – P. 2481–2491.

- доказаны теоремы об эквивалентности соответствующей однопараметрической задачи сопряжения на собственные значения и дисперсионного уравнения, о существовании и локализации собственных значений, о распределении нулей и периодичности собственных функций в однопараметрических задачах, исследованы некоторые конкретные типы нелинейностей, а также связь между решениями нелинейных задач и решениями соответствующих линейных задач;
- доказаны теоремы об эквивалентности соответствующей двухпараметрической задачи сопряжения на собственные значения и дисперсионного уравнения, о существовании и локализации парных собственных значений в двухпараметрической задаче, исследована связь между решениями нелинейной задачи и решениями соответствующей линейной задачи, предложены и обоснованы численные методы нахождения приближенных собственных значений;
- в результате исследования найдены новые типы нелинейных волн (ТЕ-, ТМ-, ТЕ-ТМ-волн) в изученных волноведущих структурах.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ

Работа носит теоретический характер. Ее теоретическая значимость заключается в создании и обосновании принципиально нового математического метода для изучения нелинейных спектральных задач теории волноводов. Введены понятия собственного значения и парных собственных значений для некоторых классов нелинейных спектральных задач. Также предложен, обоснован и реализован численный метод нахождения приближенных собственных значений в рассматриваемых задачах. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории нелинейных спектральных и краевых задач.

Практическая значимость работы состоит в том, что построенный математический аппарат позволил доказать существование нелинейных режимов распространения электромагнитных волн и предсказать существование новых типов нелинейных волн.

ОБОСНОВАННОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами, сравнением результатов с простейшими модельными задачами.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- семинаре кафедры физики Osnabrück University, руководитель – проф. Н.-W. Schürmann (Германия, г. Оснабрюк, 2010, 2011);
- семинаре по электродинамике факультета ВМК, МГУ им. М. В. Ломоносова, руководители – проф. Е. В. Захаров и проф. А. С. Ильинский (Россия, г. Москва, 2012);
- семинаре кафедры «Прикладная математика» Казанского (Приволжского) федерального университета, руководитель – проф. Н. Б. Плещинский (Россия, г. Казань, 2013);
- семинаре кафедры Electrical, Electronic, and Communication Engineering университета Чуо, руководитель – проф. К. Kobayashi (Япония, г. Токио, 2013);
- семинаре кафедры Electrical Engineering университета Nihon, руководитель – проф. Т. Yamasaki (Япония, г. Токио, 2013);
- семинаре Computational and Applied Mathematics университета Chalmers, руководитель – проф. S. Larsson (Швеция, г. Гетеборг, 2013);
- семинаре «Вычислительная математика и приложения», Институт вычислительной математики РАН, руководитель – чл.-корр. РАН, проф. Е. Е. Тыртышников (Россия, г. Москва, 2013);
- научно-методологическом семинаре НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, руководитель – д.ф.-м.н., проф. А. В. Тихонравов (Россия, г. Москва, 2013);
- семинаре, руководимом акад. РАН, проф. В. А. Ильиным и акад. РАН, проф. Е. И. Моисеевым (факультет ВМК, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, г. Москва, 2013);
- международных конференциях «Days on Diffraction» (Россия, г. Санкт-Петербург, 2007, 2011, 2013);
- 13-й и 14-й международных конференциях «Mathematical Methods in Electromagnetic Theory» (Украина, г. Киев, 2010; г. Харьков, 2012);
- международных конференциях «Progress in Electromagnetic Research Symposium» (Китай, г. Сучжоу, 2011; Малайзия, г. Куала Лумпур, 2012; Россия, г. Москва, 2012);
- международном семинаре «Workshop on Large-Scale Modeling» (Швеция, г. Сунне, 2012);
- международной конференции «International Symposium on Electromagnetic Theory» (Япония, г. Хирошима, 2013).

Работа была поддержана грантами РФФИ (№ 06-07-89063а, 2008–2009; № 12-07-97010-р_А, 2012–2013; № 11-07-00330-А, 2011–2012), ФЦП

(№ 2.1.1/1647, 2009–2011; № 14.В37.21.1950, 2012–2013), программы Visby (2012–2013, Швеция), Грантами Президента РФ (МК-2074.2011.1, 2011–2012; МК-90.2014.1, 2014–2015).

ПУБЛИКАЦИИ

Основные результаты диссертации отражены в 29 научных работах (2 монографии; 27 статей, из них 7 публикаций без соавторов). Все указанные статьи опубликованы в реферируемых журналах (статьи [3–25] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК РФ, в которых рекомендуется публиковать основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук), обе монографии также прошли рецензирование. В совместных работах профессору Ю. Г. Смирнову принадлежит первоначальная постановка задач, аспирантам Е. В. Зарембо и Е. Ю. Смолькину – программная реализация некоторых численных методов, Д. В. Валовику – получение конкретных результатов и их доказательства.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ

Диссертация изложена на 155 страницах, включающих 11 рисунков, и состоит из введения, трех глав, списка литературы, содержащего 127 наименований, и четырех приложений.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулирована цель и дан обзор работ по теме исследований, изложено краткое содержание и сформулированы основные результаты диссертации.

В **главе 1** исследуется нелинейная однопараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение поверхностных электромагнитных ТЕ-волн в слое, диэлектрическая проницаемость которого является произвольной функцией от модуля напряженности электрического поля.

Рассматриваются монохроматические ТЕ-волны $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$, распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h\}$, здесь

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T - \quad (1.1)$$

комплексные амплитуды; ω – круговая частота.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные

диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается следующим выражением: $\varepsilon = \varepsilon_2 + f(|\mathbf{E}|^2)$, где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $f \in C^1[0, +\infty)$, $f(s^2) \geq 0$ и $f(0) = 0$.

Комплексные амплитуды (1.1) удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1.2)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Доказано, что компоненты ТЕ-волн, распространяющихся вдоль границы слоя Σ , имеют представление

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}, \quad (1.3)$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Обозначим $k_0^2 := \omega^2\mu_0\varepsilon_0$. Подставляя компоненты (1.3) в систему (1.2), выполняя нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = k_0x$, $\frac{d}{dx} = k_0\frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}$, $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3$), обозначая $Y(\tilde{x}) := E_y(\tilde{x})$ и опуская значок тильды, получаем

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon)Y(x), \quad (1.4)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + f(Y^2), & 0 \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases} \quad (1.5)$$

Функция Y дифференцируема так, что

$$Y(x) \in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \quad (1.6)$$

Условия сопряжения для функции Y следуют из условий непрерывности касательных компонент электромагнитного поля и имеют вид

$$[Y]|_{x=0} = 0, \quad [Y]|_{x=h} = 0, \quad [Y']|_{x=0} = 0, \quad [Y']|_{x=h} = 0, \quad (1.7)$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Определение 1.1. Число $\gamma = \hat{\gamma}$ такое, что при фиксированном значении $Y(0) \neq 0$ (без потери общности можно считать $Y(0) > 0$) существует не равная тождественно нулю функция $Y(x; \hat{\gamma})$, которая удовлетворяет уравнению (1.4), условиям (1.6), (1.7) и затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, будем называть собственным значением, а функцию $Y(x; \hat{\gamma})$, соответствующую этому собственному значению, – собственной функцией.

Задача P_E : доказать существование собственных значений γ , удовлетворяющих определению 1.1.

Разыскиваются такие положительные значения γ , что справедливо $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$. Это условие соответствует классической задаче распространения ТЕ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью¹, поэтому мы придерживаемся его при изучении задачи P_E .

Пусть $k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$, $k_2^2 := \varepsilon_2 - \gamma^2 > 0$, $k_3^2 := \gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$.

При $x < 0$ и $x > h$ уравнение (1.4) является линейным. Учитывая условие на бесконечности, получаем, что решения уравнения (1.4) в указанных областях имеют вид

$$Y(x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x}, & x < 0; \\ Be^{-k_3(x-h)}, & x > h. \end{cases} \quad (1.8)$$

Постоянная A в (1.8) отвечает значению $Y(0)$ (см. определение 1.1) и предполагается фиксированной (известной).

Постоянная B определяется условиями сопряжения (1.7).

Внутри слоя Σ уравнение (1.4) принимает вид

$$Y'' = -(k_2^2 + f(Y^2)) Y. \quad (1.9)$$

Первый интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид

$$Y'^2 + k_2^2 Y^2 + \varphi(Y^2) \equiv C, \quad (1.10)$$

где $\varphi(Y^2) = \int_0^{Y^2} f(u) du$; C – постоянная.

Постоянная C вычисляется из первого интеграла (1.10) с использованием решения (1.8) и условий сопряжения (1.7) и равна

$$C = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) A^2 + \varphi(A^2). \quad (1.11)$$

Неизвестная постоянная B определяется из уравнения

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) B^2 + \varphi(B^2) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) A^2 + \varphi(A^2), \quad (1.12)$$

которое имеет два действительных решения $\pm B'$.

¹Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.

Постоянные B и C не зависят ни от точки $x = h$, ни от спектрального параметра γ ; кроме того, $C > 0$.

Доказано, что дисперсионное уравнение задачи P_E имеет вид

$$\Phi(\gamma; n) := T_1 + nT_2 = h, \quad (1.13)$$

где

$$T_1 = \int_{-k_3}^{k_1} w d\eta, \quad T_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta \quad \text{и} \quad w = \frac{1}{k_2^2 + f(\tau) + \eta^2};$$

функция $\tau \equiv \tau(\eta)$ определяется из уравнения $(\eta^2 + k_2^2)\tau + \varphi(\tau) \equiv C$; C определена формулой (1.11); $n = 0, 1, 2, \dots$

Важно отметить, что дисперсионное уравнение (1.13) не зависит от решений уравнения (1.12).

Фактически уравнение (1.13) является семейством (но не системой) уравнений для различных n . Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Другими словами, пусть σ_E^D – множество решений дисперсионного уравнения (1.13). Тогда $\sigma_E^D = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i$, где σ_j содержит все положительные решения (и только их) уравнения $\Phi(\gamma; j) - h = 0$. Кроме того, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех возможных $i \neq j$.

Пусть σ_E – совокупность всех собственных значений задачи P_E . Справедлива следующая теорема об эквивалентности, которая, в частности, утверждает, что $\sigma_E = \sigma_E^D$.

Теорема 1.1 (об эквивалентности). *Значение $\gamma = \hat{\gamma}$ является собственным значением задачи P_E тогда и только тогда, когда существует целое число $n = \hat{n} \geq 0$ такое, что $\gamma = \hat{\gamma}$ удовлетворяет уравнению $\Phi(\gamma; \hat{n}) - h = 0$.*

Кроме того, собственная функция $Y(x; \hat{\gamma})$ имеет в точности $\hat{n}$ нулей при $x \in (0, h)$; если x_i является i -м нулем функции $Y(x; \hat{\gamma})$, то $x_i = \int_{-\infty}^{k_1} w d\eta + (i - 1)T_2$.

Теорема 1.2 (о периодичности). *Пусть $\hat{\gamma}$ – собственное значение задачи P_E . Если собственная функция $Y(x; \hat{\gamma})$ имеет более двух нулей при $x \in (0, h)$, тогда функция $Y(x; \hat{\gamma})$ периодическая с периодом $2T_2$.*

Пусть $\Gamma = (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$ и $h_{\inf}^k = \inf_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma; k)$, $h_{\sup}^k = \sup_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma; k)$.

Величина $h_{\inf}^k$ всегда существует. Указанная $\sup$ существует не всегда, например, $\sup$ не существует, если $f \equiv 0$. Когда мы пишем $h_{\sup}^k$, мы предполагаем, что указанный (конечный) $\sup$ существует.

Теорема 1.3. Пусть для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$, $f \in C^1[0, +\infty)$ и h таково, что $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Теорема 1.4. Пусть $\Phi(\gamma; k)$ неограничена при $\gamma^2 \in \Gamma$, $f \in C^1[0, +\infty)$ и h таково, что для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

В теоремах 1.3, 1.4 утверждается существование собственных значений; в теоремах 1.5, 1.6 – их изолированность.

Теорема 1.5. Пусть для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$, функция $f(u)$ является аналитической функцией в $\mathbb{C}$ (как функция комплексного переменного $u = Y^2$) и h таково, что $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Кроме того, если условие $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$ справедливо для всех p , то множество собственных значений σ_E задачи P_E является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Теорема 1.6. Пусть функция $\Phi(\gamma; k)$ неограничена при $\gamma^2 \in \Gamma$, функция $f(u)$ является аналитической функцией в $\mathbb{C}$ (как функция комплексного переменного $u = Y^2$) и h таково, что для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Кроме того, если условие $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$ справедливо для всех p , то множество собственных значений σ_E задачи P_E является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Величины $h_{\inf}^k$ и $h_{\sup}^k$ можно находить численно.

Условие $\gamma^2 < \varepsilon_2$ является точным. Действительно, для функции $f \equiv 0$ получаем линейную задачу. В такой линейной задаче необходимо $\gamma^2 < \varepsilon_2$.

Также в первой главе исследованы две задачи для конкретных функций нелинейности: задача P_{E1} : $f \equiv \alpha Y^2$ (закон Керра); задача P_{E2} : $f \equiv \frac{\alpha Y^2}{1 + \beta Y^2}$ (нелинейность с насыщением). Эти нелинейности находят широкое применение в нелинейной оптике.

В теоремах 1.7, 1.8 используются следующие обозначения для собственных значений $\hat{\gamma}$ задач P_{E1} , P_{E2} : $\hat{\gamma}_i$ значит, что все собственные значения упорядочены по возрастанию; $\hat{\gamma}(m)$ значит, что это собственное значение является решением дисперсионного уравнения (1.13) при

$n = m$; значком P_E^{lin} обозначается линейная задача с постоянным $\varepsilon = \varepsilon_2$, такая задача имеет не более конечного числа собственных значений, обозначаемых $\tilde{\gamma}_i$.

Теорема 1.7 (Задача P_{E1}). Пусть $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2$, $\alpha > 0$ и $Y(0) \neq 0$. В этом случае для любого $h > 0$ задача P_{E1} имеет бесконечное число положительных собственных значений $\hat{\gamma}_i$ (с точкой накопления на бесконечности).

Собственные значения $\hat{\gamma}_i$ имеют следующие свойства:

1) если $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots$ – все решения задачи P_{E1} , то

$$\hat{\gamma}_1^2, \hat{\gamma}_2^2, \dots \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), +\infty) \text{ и } \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_j^2 \rightarrow \infty;$$

2) если задача P_E^{lin} имеет p решений $\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2 < \dots < \tilde{\gamma}_p$, то существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для любого $\alpha = \alpha' < \alpha_0$ справедливо

$$\hat{\gamma}_i^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2) \text{ и } \lim_{\alpha' \rightarrow 0} \hat{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_i, \quad i = \overline{1, p},$$

где $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p$ – первые p решений задачи P_{E1} при $\alpha = \alpha'$;

2') если $q > p$, то $\lim_{\alpha' \rightarrow +0} \hat{\gamma}_q^2 = +\infty$;

3) для больших значений γ и произвольно малого $\Delta > 0$ справедливо следующее асимптотическое двойное неравенство:

$$(1 - \Delta)\gamma_{\bullet}(m) \leq \hat{\gamma}(m) \leq \sqrt{2}(1 + \Delta)\gamma_{\bullet}(m + 1),$$

где $\gamma_{\bullet}^2(m) = \varepsilon_2 + \left(f^{-1}\left(\frac{h}{4m}\right)\right)^2$, f^{-1} есть обращение функции $f(t) = t^{-1} \ln t$;

3') если $\sqrt{2\alpha C} < 1$, где $C = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + 0,5\alpha A^4$, то для больших значений γ справедливо более простое асимптотическое неравенство $\hat{\gamma}(m) \geq \gamma_{\circ}(m)$, где $\gamma_{\circ}^2(m) = \varepsilon_2 + \left(\frac{m}{h} \ln(2\alpha C)\right)^2$;

4) если собственное значение $\hat{\gamma}_i \rightarrow \infty$, то $\max_{x \in (0, h)} |Y(x; \hat{\gamma}_i)| \rightarrow \infty$.

Теорема 1.8 (Задача P_{E2}). Пусть $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geq \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2$, $\alpha, \beta > 0$ и $Y(0) \neq 0$. Тогда существует $h_{\min} > 0$ такое, что для любого $h > h_{\min}$ задача P_{E2} имеет конечное число (и не менее одного) положительных собственных значений $\hat{\gamma}_i$.

Для всякого собственного значения $\hat{\gamma}_i$ задачи P_{E2} справедливо, что

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \hat{\gamma}_i^2 < \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1},$$

кроме того, для всяких допустимых m и $m + 1$ справедливо

$$\max \hat{\gamma}(m + 1) < \max \hat{\gamma}(m),$$

где $\max$ берется среди всех положительных решений уравнения (1.13) с заданным $n = m$.

В главе 2 исследуется нелинейная однопараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение поверхностных электромагнитных ТМ-волн в анизотропном слое, заполненном средой, диэлектрическая проницаемость которой является произвольной функцией от модуля напряженности электрического поля.

Рассматриваются монохроматические ТМ-волны $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$, распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h\}$, здесь

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)^T, \quad \mathbf{H} = (0, H_y, 0)^T - \quad (2.1)$$

комплексные амплитуды; ω – круговая частота.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается следующим диагональным тензором 3×3 :

$$\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}), \quad (2.2)$$

элементы ε_{xx} , ε_{zz} имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_f + \varepsilon_0 f(a|E_x|^2 + b|E_z|^2), \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_g + \varepsilon_0 g(c|E_x|^2 + d|E_z|^2), \quad (2.3)$$

где $\varepsilon_f > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\varepsilon_g \geq 0$ – постоянные (вещественные) составляющие диэлектрических проницаемостей ε_{xx} , ε_{zz} ; a, b, c, d – неотрицательные постоянные, не все равные нулю;

$$f \in C^1[0, +\infty), \quad g \in C^1[0, +\infty), \quad f(s^2) \geq 0, \quad g(s^2) \geq 0$$

и $f(0) = g(0) = 0$. Кроме того, функции f и g являются таковыми, что выполняется соотношение $\frac{\partial f}{\partial(Z^2)} = \frac{\partial g}{\partial(X^2)}$. Условие $\frac{\partial f}{\partial(Z^2)} = \frac{\partial g}{\partial(X^2)}$ на компоненты тензора (2.2) указано в¹, где утверждается, что многие типы нелинейностей удовлетворяют такому условию. В главе 2 доказано, что без этого условия можно обойтись. Элемент ε_{yy} не оказывает влияния на распространение ТМ-волн.

¹Joseph R. I., Christodoulides D. N. // Optics Letters. – 1987. – V. 12, № 10. – P. 826–828.

Комплексные амплитуды (2.1) удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (2.4)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Доказано, что компоненты ТМ-волн, распространяющихся вдоль границы слоя Σ , имеют представление

$$E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}, H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}, \quad (2.5)$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Обозначим $k_0^2 := \omega^2\mu_0\epsilon_0$. Подставляя компоненты (2.5) в систему (2.4), выполняя нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = k_0x$, $\frac{d}{dx} = k_0\frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}$, $\tilde{\epsilon}_i = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}$ ($i = 1, 2$), $\tilde{\epsilon}_f = \frac{\epsilon_f}{\epsilon_0}$, $\tilde{\epsilon}_g = \frac{\epsilon_g}{\epsilon_0}$, обозначая $Z(\tilde{x}) := E_z$, $X(\tilde{x}) := iE_x$ и опуская значок тильды, получаем

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = \epsilon_{zz}Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}\epsilon_{xx}X, \end{cases} \quad (2.6)$$

где с учетом предыдущего

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \begin{cases} \epsilon_1, & x < 0; \\ \epsilon_f + f(aX^2 + bZ^2), & 0 \leq x \leq h; \\ \epsilon_3, & x > h; \end{cases} \\ \epsilon_{zz} &= \begin{cases} \epsilon_1, & x < 0; \\ \epsilon_g + g(cX^2 + dZ^2), & 0 \leq x \leq h; \\ \epsilon_3, & x > h. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функции X , Z дифференцируемы так, что

$$\begin{aligned} X(x) &\in C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty), \\ Z(x) &\in C(-\infty, +\infty) \cap C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty) \cap \\ &\quad \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Условия сопряжения для функций X , Z следуют из условий непрерывности касательных компонент электромагнитного поля и имеют вид

$$\begin{aligned} [\gamma X - Z']|_{x=0} &= 0, \quad [Z]|_{x=0} = 0, \\ [\gamma X - Z']|_{x=h} &= 0, \quad [Z]|_{x=h} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Определение 2.1. Число $\gamma = \hat{\gamma}$ такое, что при фиксированном значении $X(0) \neq 0$ (без потери общности можно считать $X(0) > 0$) существуют не равные тождественно нулю функции $X(x; \hat{\gamma})$, $Z(x; \hat{\gamma})$, которые удовлетворяют системе уравнений (2.6), условиям (2.8), (2.9) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, будем называть собственным значением, а функции $X(x; \hat{\gamma})$, $Z(x; \hat{\gamma})$, соответствующие этому собственному значению, – собственными функциями.

Задача P_M : доказать существование собственных значений γ , удовлетворяющих определению 2.1.

Разыскиваются такие положительные значения γ , что справедливо неравенство $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_f$. Это условие соответствует классической задаче распространения ТМ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью (см. Вайнштейн Л. А.), поэтому мы придерживаемся его при изучении задачи P_M .

Пусть $k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$, $k_3^2 := \gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$.

При $x < 0$ и $x > h$ система (2.6) является линейной. Учитывая условие на бесконечности, получаем, что решения системы (2.6) в указанных областях имеют вид

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x}, & x < 0, \\ Be^{-k_3(x-h)}, & x > h; \end{cases} \quad Z(x) = \begin{cases} A\gamma^{-1}k_1 e^{k_1 x}, & x < 0, \\ -B\gamma^{-1}k_3 e^{-k_3(x-h)}, & x > h. \end{cases} \quad (2.10)$$

Постоянная A в (2.10) отвечает значению $X(0)$ (см. определение 2.1) и предполагается фиксированной (известной), а постоянная B определяется условиями сопряжения (2.9).

Внутри слоя Σ система (2.6) принимает вид

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = (\varepsilon_g + g)Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}(\varepsilon_f + f)X. \end{cases} \quad (2.11)$$

Система (2.11) может быть переписана в нормальной форме

$$\begin{cases} X' = \frac{\gamma^2(\varepsilon_g + g) + 2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)X^2 f'_{Z^2}}{\gamma(2X^2 f'_{X^2} + \varepsilon_f + f)} Z, \\ Z' = \gamma^{-1}(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)X. \end{cases} \quad (2.12)$$

Первый интеграл системы (2.11) имеет вид

$$X^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)^2 + \gamma^2((\varepsilon_f - \gamma^2)X^2 + \varepsilon_g Z^2) + \gamma^2 G \equiv C, \quad (2.13)$$

где $G \equiv G(X^2, Z^2) \equiv \frac{1}{2d} \int_{cX^2}^{cX^2 + dZ^2} g(s)ds$; C – постоянная.

Обозначим через

$$X_0 := X(0+0), \quad X_h := X(h-0), \quad Z_0 := Z(0+0), \quad Z_h := Z(h-0)$$

предельные значения функций X и Z на границах слоя Σ изнутри.

Справедливы формулы

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 A &= (\varepsilon_f + f(aX_0^2 + bk_1^2\gamma^{-2}A^2))X_0, \quad Z_0 = \gamma^{-1}k_1A, \\ \varepsilon_3 B &= (\varepsilon_f + f(aX_h^2 + bk_3^2\gamma^{-2}B^2))X_h, \quad Z_h = -\gamma^{-1}k_3B, \end{aligned} \quad (2.14)$$

которые получены из условий сопряжения (2.9) и решений (2.10).

Поскольку постоянная A предполагается известной, то X_0 определяется из первого уравнения (2.14).

Обозначим $f_0 := f(aX_0^2 + bZ_0^2)$ и $G_0 := G(X_0^2, Z_0^2)$. Тогда, используя первый интеграл (2.13), подставляя $x = 0$, найдем

$$C = X_0^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f_0)^2 + \gamma^2((\varepsilon_f - \gamma^2)X_0^2 + \varepsilon_g Z_0^2) + G_0. \quad (2.15)$$

Неизвестные значения X_h и Z_h определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} -\gamma\varepsilon_3 k_3^{-1} Z_h = (\varepsilon_f + f_h)X_h; \\ (\varepsilon_f - \gamma^2 + f_h)^2 X_h^2 + \gamma^2((\varepsilon_f - \gamma^2)X_h^2 + \varepsilon_g Z_h^2) + G_h = C, \end{cases} \quad (2.16)$$

где $f_h := f(aX_h^2 + bZ_h^2)$ и $G_h := G(X_h^2, Z_h^2)$.

При известном значении Z_h постоянная B определяется по формуле $B = -\gamma k_3^{-1} Z_h$.

Доказано, что дисперсионное уравнение задачи P_M имеет вид

$$\Phi(\gamma; n) := -T_1 + nT_2 = h, \quad (2.17)$$

где

$$T_1 = \int_{\eta(h)}^{\eta(0)} w d\eta, \quad T_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta,$$

величины $\eta(0)$, $\eta(h)$ определяются формулами

$$\eta(0) = \frac{\gamma\varepsilon_1}{k_1} > 0 \quad \text{и} \quad \eta(h) = -\frac{\gamma\varepsilon_3}{k_3} < 0;$$

а функция w имеет следующий вид:

$$w = \frac{\gamma(\varepsilon_f + f)}{\gamma^2(\varepsilon_f + f)(\varepsilon_g + g) + (\varepsilon_f - \gamma^2 + f)\eta^2},$$

где

$$f \equiv f(\tau), \quad g \equiv g\left(\tau \frac{c\eta^2 + d(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}\right);$$

функция $\tau \equiv \tau(\eta)$ определяется из уравнения

$$\tau \frac{\eta^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)^2 + \gamma^2(\varepsilon_f - \gamma^2)\eta^2 + \gamma^2\varepsilon_g(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2} + \gamma^2 G(s, t) \equiv C,$$

где $s = \frac{\tau\eta^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}$, $t = \frac{\tau(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}$, а функции f и g имеют тот же смысл, что и выше; постоянная C определяется формулой (2.15); $n = 1, 2, 3, \dots$

Важно отметить, что дисперсионное уравнение (2.17) не зависит от решений системы (2.16).

Фактически уравнение (2.17) является семейством (но не системой) уравнений для различных n . Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Другими словами, пусть σ_M^D – множество решений дисперсионного уравнения (2.17). Тогда $\sigma_M^D = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i$, где σ_j содержит все положительные решения (и только их) уравнения $\Phi(\gamma; j) - h = 0$. Кроме того, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех возможных $i \neq j$.

Пусть σ_M – совокупность всех собственных значений задачи P_M . Справедлива следующая теорема об эквивалентности, которая, в частности, утверждает, что $\sigma_M = \sigma_M^D$.

Теорема 2.1 (об эквивалентности). *Значение $\gamma = \hat{\gamma}$ является собственным значением задачи P_M тогда и только тогда, когда существует целое число $n = \hat{n} \geq 0$ такое, что $\gamma = \hat{\gamma}$ удовлетворяет уравнению $\Phi(\gamma; \hat{n}) - h = 0$.*

Кроме того, собственная функция $Z(x; \hat{\gamma})$ имеет в точности $\hat{n}$ нулей при $x \in (0, h)$; если x_i является i -м нулем функции $Z(x; \hat{\gamma})$, то $x_i = \int_{\eta(0)}^{+\infty} w d\eta + (i - 1)T_2$.

Теорема 2.2 (о периодичности). *Пусть $\hat{\gamma}$ – собственное значение задачи P_M . Если собственная функция $Z(x; \hat{\gamma})$ имеет более двух нулей при $x \in (0, h)$, тогда функция $Z(x; \hat{\gamma})$ периодическая с периодом $2T_2$.*

Пусть $\Gamma = (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_f)$ и $h_{\inf}^k = \inf_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma, k)$, $h_{\sup}^k = \sup_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma, k)$.

Величина $h_{\inf}^k$ всегда существует. Указанная $\sup$ существует не всегда, например, $\sup$ не существует, если $f \equiv 0$, $g \equiv 0$. Когда мы пишем $h_{\sup}^k$, мы предполагаем, что указанный (конечный) $\sup$ существует.

Теорема 2.3. Пусть для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$, $f \in C^1[0, +\infty)$, $g \in C^1[0, +\infty)$, система (2.16) имеет действительное решение (X_h, Z_h) и h таково, что $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

Теорема 2.4. Пусть $\Phi(\gamma, k)$ неограниченна при $\gamma^2 \in \Gamma$, $f \in C^1[0, +\infty)$, $g \in C^1[0, +\infty)$, система (2.16) имеет действительное решение (X_h, Z_h) и h таково, что для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).

В теоремах 2.3, 2.4 утверждается существование собственных значений; в теоремах 2.5, 2.6 – их изолированность.

Пусть правые части системы (2.12) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$ с центром в нуле и радиусом $R > 0$. Шар выбран таким образом, что $|2X^2 f'_{X^2} + f| < \varepsilon_f - \Delta$, где $\Delta > 0$ – фиксированное достаточно малое число. В силу непрерывности функции f такое число R всегда существует, поскольку $f(0) = 0$ и f' ограничена на $B(0, R)$.

Теорема 2.5. Пусть для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$, система (2.16) имеет действительное решение (X_h, Z_h) , правые части системы (2.12) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$, где $R > 0$, число M является наибольшим из модулей максимумов правых частей системы (2.12) и $h \leq \frac{R}{3M}$ таково, что $h_{\inf}^p < h < h_{\sup}^p$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение.

Кроме того, если условие $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$ справедливо для всех p , то множество собственных значений σ_M задачи P_M является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Теорема 2.6. Пусть $\Phi(\gamma, k)$ неограниченна при $\gamma^2 \in \Gamma$, система (2.16) имеет действительное решение (X_h, Z_h) , правые части системы (2.12) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$, где $R > 0$, число M является наибольшим из модулей максимумов правых частей системы (2.12) и $h \leq \frac{R}{3M}$ таково, что для некоторого p выполняется $h_{\inf}^p < h$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение.

Кроме того, если условие $h_{\inf}^p < h_{\sup}^p$ справедливо для всех p , то множество собственных значений σ_M задачи P_M является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Величины $h_{\inf}^k$ и $h_{\sup}^k$ можно находить численно.

Заметим, что условие $\gamma^2 < \varepsilon_f$ является точным. Действительно, для функций $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ получаем линейную задачу. В такой линейной задаче необходимо $\gamma^2 < \varepsilon_f$.

В **главе 3** исследуется нелинейная двухпараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение связанных электромагнитных ТЕ-ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью.

Рассмотрим электромагнитные волны

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\omega_E \omega_M} &= \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \mathbf{H}_{\omega_E \omega_M} &= \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t},\end{aligned}\tag{3.1}$$

распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq x \leq h\}$, здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_E &= (0, E_y, 0)^T, & \mathbf{E}_M &= (E_x, 0, E_z)^T, \\ \mathbf{H}_E &= \underbrace{(H_x, 0, H_z)^T}_{\text{ТЕ-волны}}, & \mathbf{H}_M &= \underbrace{(0, H_y, 0)^T}_{\text{ТМ-волны}} -\end{aligned}\tag{3.2}$$

комплексные амплитуды; ω_E, ω_M – круговые частоты; $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается законом Керра¹, который имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{E}_{\omega_E \omega_M}|^2$, где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\alpha > 0$.

Поля (3.1) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{rot} (\mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}) = i\mu\omega_E \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + i\mu\omega_M \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \operatorname{rot} (\mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}) = -i\varepsilon\omega_E \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} - i\varepsilon\omega_M \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \end{cases}\tag{3.3}$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x = -h$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

¹Делоне Н. Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом. – М.: Наука, 1989; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: для вузов. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2001; Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1989.

Доказано, что компоненты ТЕ-ТМ-волн, распространяющихся вдоль границы слоя Σ , имеют представление

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(x)e^{i\gamma_M z}, & E_y &= E_y(x)e^{i\gamma_E z}, & E_z &= E_z(x)e^{i\gamma_M z}, \\ H_x &= H_x(x)e^{i\gamma_E z}, & H_y &= H_y(x)e^{i\gamma_M z}, & H_z &= H_z(x)e^{i\gamma_E z}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где γ_E, γ_M – пара неизвестных (действительных) спектральных параметров (пара постоянных распространения связанной ТЕ-ТМ-волны).

Пусть $k_0^2 = \omega_M^2 \varepsilon_0 \mu_0$. Подставляя поля (3.2) с компонентами (3.4) в систему (3.3), нормируя в соответствии с формулами $\tilde{x} = k_0 x$, $\frac{d}{dx} = k_0 \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma}_E = \frac{\gamma_E}{k_0}$, $\tilde{\gamma}_M = \frac{\gamma_M}{k_0}$, $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}$, обозначая $X := iE_x$, $Y := E_y$, $Z := E_z$, $\tau := \omega_E^2 \omega_M^{-2}$ и опуская значок тильды, получаем

$$\begin{cases} \gamma_M(\gamma_M X - Z') = \varepsilon X, \\ \gamma_E^2 Y - Y'' = \tau \varepsilon Y, \\ \gamma_M X' - Z'' = \varepsilon Z, \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < -h; \\ \varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Y^2 + Z^2), & -h \leq x \leq h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Функции X, Y, Z дифференцируемы так, что

$$\begin{aligned} X(x) &\in C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty), \\ Y(x) &\in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty), \\ Z(x) &\in C(-\infty, +\infty) \cap C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty) \cap \\ &\quad \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условия сопряжения для функций X, Y, Z следуют из условий непрерывности касательных компонент электромагнитного поля и имеют вид

$$[Z' - \gamma_M X]|_{x=\pm h} = 0, \quad [Y]|_{x=\pm h} = 0, \quad [Y']|_{x=\pm h} = 0, \quad [Z]|_{x=\pm h} = 0. \quad (3.7)$$

Определение 3.1. Пару чисел $(\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$ такую, что при заданных значениях $X(0), Y(0)$ существует не равный тождественно нулю вектор $W = (X, Y, Z)^T$ такой, что функции X, Y, Z удовлетворяют системе уравнений (3.5), условиям (3.6), (3.7) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, будем называть парным собственным значением. Вектор W , который соответствует парному собственному значению, будем называть собственным вектором, а компоненты $X(x; \hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$, $Y(x; \hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$, $Z(x; \hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$ вектора W – собственными функциями.

Задача P: доказать существование парных собственных значений $(\widehat{\gamma}_E, \widehat{\gamma}_M)$, удовлетворяющих определению 3.1.

Пусть $k_{E1}^2 := \gamma_E^2 - \tau\varepsilon_1$, $k_{E3}^2 := \gamma_E^2 - \tau\varepsilon_3$, $k_{M1}^2 := \gamma_M^2 - \varepsilon_1$, $k_{M3}^2 := \gamma_M^2 - \varepsilon_3$.

Решения (линейной) системы (3.5) при $x < -h$ и $x > h$ в соответствии с условиями излучения имеют вид

$$\begin{cases} X(x) = C_M^{(-h)} e^{(x+h)k_{M1}}, \\ Y(x) = C_E^{(-h)} e^{(x+h)k_{E1}}, \\ Z(x) = \frac{k_{M1}}{\gamma_M} C_M^{(-h)} e^{(x+h)k_{M1}}; \end{cases} \quad \begin{cases} X(x) = C_M^{(h)} e^{-(x-h)k_{M3}}, \\ Y(x) = C_E^{(h)} e^{-(x-h)k_{E3}}, \\ Z(x) = -\frac{k_{M3}}{\gamma_M} C_M^{(h)} e^{-(x-h)k_{M3}}, \end{cases} \quad (3.8)$$

где $C_M^{(-h)}$, $C_E^{(-h)}$, $C_M^{(h)}$ и $C_E^{(h)}$ – постоянные интегрирования. Постоянные $C_M^{(h)}$, $C_E^{(h)}$ предполагаются заданными (они отвечают значениям $X(0)$, $Y(0)$ в определении 3.1), а постоянные $C_M^{(-h)}$, $C_E^{(-h)}$ определяются из условий сопряжения.

Пусть $k_E^2 = \tau\varepsilon_2 - \gamma_E^2$, $k_M^2 = \varepsilon_2 - \gamma_M^2$ и $f_X = (X^2 + Y^2 + Z^2)X$, $f_Y = (X^2 + Y^2 + Z^2)Y$, $f_Z = (X^2 + Y^2 + Z^2)Z$, тогда внутри слоя Σ систему (3.5) можно записать в виде

$$\begin{cases} X = -\gamma_M k_M^{-2} Z' - \alpha k_M^{-2} f_X, \\ Y'' + k_E^2 Y = -\alpha \tau f_Y, \\ Z'' + k_M^2 Z = -\alpha \varepsilon_2^{-1} k_M^2 f_Z - \alpha \varepsilon_2^{-1} \gamma_M f_X'. \end{cases} \quad (3.9)$$

Обращая линейные части второго и третьего уравнений в системе (3.9), перейдем к интегральным уравнениям.

Пусть $L_E = \frac{d^2}{dx^2} + k_E^2$, $L_M = \frac{d^2}{dx^2} + k_M^2$. Тогда функции Грина для следующих краевых задач

$$\begin{cases} L_E G_E = -\delta(x-s), \\ \partial_x G_E|_{x=-h} = \partial_x G_E|_{x=h} = 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} L_M G_M = -\delta(x-s), \\ G_M|_{x=-h} = G_M|_{x=h} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

имеют вид

$$G_E(x, s) = \begin{cases} -\frac{\cos k_E(x+h) \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\cos k_E(x-h) \cos k_E(s+h)}{k_E \sin 2k_E h}, & s < x \leq h; \end{cases} \quad (3.11)$$

$$G_M(x, s) = \begin{cases} -\frac{\sin k_M(x+h) \sin k_M(s-h)}{k_M \sin 2k_M h}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\sin k_M(x-h) \sin k_M(s+h)}{k_M \sin 2k_M h}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (3.12)$$

Переходя от системы дифференциальных уравнений (3.9) к интегральным (используя найденные функции Грина и вторую формулу Грина) и затем используя условия сопряжения (3.7) в полученной системе

интегральных уравнений, получаем систему *дисперсионных уравнений*

$$\begin{cases} \Phi_E(\gamma_E, \gamma_M) := C_E^{(h)} g_E(h, \gamma_E) - \alpha \frac{Q_E(h, \gamma_E, \gamma_M)}{\sin 2k_E h} = 0, \\ \Phi_M(\gamma_E, \gamma_M) := C_M^{(h)} k_M g_M(h, \gamma_M) - \alpha \frac{Q_M(h, \gamma_E, \gamma_M)}{\sin 2k_M h} = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

где

$$g_E(h, \gamma_E) := (k_E^2 - k_{E1}k_{E3}) \sin 2k_E h - k_E (k_{E1} + k_{E3}) \cos 2k_E h; \quad (3.14)$$

$$g_M(h, \gamma_M) := (\varepsilon_1 \varepsilon_3 k_M^2 - \varepsilon_2^2 k_{M1} k_{M3}) \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_M (\varepsilon_1 k_{M3} + \varepsilon_3 k_{M1}) \cos 2k_M h, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} Q_E(h, \gamma_E, \gamma_M) &:= \tau(k_{E1} \cos 2k_E h - k_E \sin 2k_E h) \int_{-h}^h \cos k_E(x+h) f_Y dx - \\ &\quad - \tau k_{E1} \int_{-h}^h \cos k_E(x-h) f_Y dx, \\ Q_M(h, \gamma_E, \gamma_M) &:= -2\gamma_M^2 (\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h) f_X(h-0) \times \\ &\quad \times \sin 2k_M h + k_M (\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h) \times \\ &\quad \times \int_{-h}^h [\gamma_M k_M f_Z \sin k_M(x+h) - \gamma_M^2 f_X \cos k_M(x+h)] dx - \\ &\quad - 2\gamma_M^2 \varepsilon_2 k_{M1} f_X(-h+0) \sin 2k_M h + \\ &\quad + \varepsilon_2 k_{M1} k_M \int_{-h}^h [\gamma_M k_M f_Z \sin k_M(x-h) - \gamma_M^2 f_X \cos k_M(x-h)] dx. \end{aligned}$$

Доказано, что в интегральной форме система дифференциальных уравнений (3.9) может быть записана в виде

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{N}_1 (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{h}, \quad (3.16)$$

где $\mathbf{u} = (X, Y, Z)^T$ и $|\mathbf{u}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}}^2 = \|X\|_{\mathbf{C}}^2 + \|Y\|_{\mathbf{C}}^2 + \|Z\|_{\mathbf{C}}^2$ и $\|u\|_{\mathbf{C}} = \max_{x \in [-h, h]} |u(x)|$, а $\mathbf{C}[-h, h] = C[-h, h] \times C[-h, h] \times C[-h, h]$;

линейный оператор $\mathbf{N}_1$ имеет вид

$$\mathbf{N} := \alpha \mathbf{N}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{N}_1 := \mathbf{K} + \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{J}},$$

где

$$\mathbf{K} \mathbf{g} = \int_{-h}^h \mathbf{K}(x, s) \mathbf{g}(s) ds, \quad \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{g} = \int_{-h}^h \tilde{\mathbf{K}}(x, s) \mathbf{g}(s) ds, \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T,$$

матрицы ядер $\mathbf{K}(x, s)$ и $\tilde{\mathbf{K}}(x, s)$ имеют вид

$$\mathbf{K}(x, s) = \begin{pmatrix} q_{11} \partial_{xs}^2 G_M & 0 & q_{13} \partial_s G_M \\ 0 & q_{22} G_E & 0 \\ q_{31} \partial_x G_M & 0 & q_{33} G_M \end{pmatrix},$$

$$q_{11} = \varepsilon_2^{-1} \gamma_M^2 k_M^{-2}, \quad q_{13} = -\varepsilon_2^{-1} \gamma_M, \quad q_{22} = \tau, \quad q_{31} = -\varepsilon_2^{-1} \gamma_M, \quad q_{33} = \varepsilon_2^{-1} k_M^2;$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(x, s) = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11} \lim_{s \rightarrow -h+0} \partial_{xs}^2 G_M & 0 & \tilde{q}_{13} \lim_{s \rightarrow -h+0} \partial_s G_M \\ 0 & \tilde{q}_{22} G_E|_{s \rightarrow -h+0} & 0 \\ \tilde{q}_{31} \lim_{s \rightarrow -h+0} \partial_x G_M & 0 & \tilde{q}_{33} \lim_{s \rightarrow -h+0} G_M \end{pmatrix},$$

$\tilde{q}_{11} = \gamma_M p_1(s)$, $\tilde{q}_{13} = -k_M^2 p_1(s)$, $\tilde{q}_{22} = q(s)$, $\tilde{q}_{31} = -\frac{\gamma_M}{k_M} p_2(s)$, $\tilde{q}_{33} = k_M p_2(s)$
и $p_1(s) = \gamma_M \frac{k_{M1}}{k_M^2} \frac{\cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h}$, $p_2(s) = \frac{k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h}$,
 $q(s) = \tau \frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h - k_{E1} \cos 2k_E h}$, а операторы $\mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{J}}$ представимы следующим образом:

$$\mathbf{J} = -\frac{\gamma_M^2 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 k_M^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} -2\gamma_M p_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\gamma_M k_M^{-1} p_2(s) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^T$, где

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{C_M^{(h)} k_{M3}}{k_M \sin 2k_M h} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{M1} \cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} + \cos k_M(s+h) \right], \\ h_2 &= \frac{C_E^{(h)} k_{E3}}{k_E \sin 2k_E h} \left[\frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h - k_{E1} \cos 2k_E h} + \cos k_E(s+h) \right], \\ h_3 &= \frac{-C_M^{(h)} k_{M3}}{\gamma_M \sin 2k_M h} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} + \sin k_M(s+h) \right]. \end{aligned}$$

Операторы $\mathbf{K}$, $\tilde{\mathbf{K}}$, $\mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{J}}$ являются линейными.

Теорема 3.1. Пусть $B_{r_0} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_0\}$ – шар радиуса r_0 с центром в нуле. Также пусть выполняются два условия:

$$q := 3\alpha r_0^2 \|\mathbf{N}_1\| < 1, \quad \alpha r_0^3 \|\mathbf{N}_1\| + \|\mathbf{h}\| \leq r_0. \quad (3.17)$$

Тогда существует единственное решение $\mathbf{u} \in B_{r_0}$ уравнения (3.16).

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 3.2. Если $\alpha \leq A^2$, где $A = \frac{2}{3\|\mathbf{h}\|\sqrt{3\|\mathbf{N}_1\|}}$, тогда уравнение (3.16) имеет единственное решение $\mathbf{u}$ в шаре $B_{r_*} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq r_*\}$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{C}[-h, h]$, $\|\mathbf{u}\| \leq r_*$, где $r_* = -\frac{2}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \|\mathbf{h}\| \sqrt{3\|\mathbf{N}\|}\right) - \frac{2\pi}{3}\right)$.

Отметим, что $A > 0$ не зависит от α .

Также справедлива теорема о непрерывной зависимости решения операторного уравнения (3.16) от спектрального параметра.

Теорема 3.3. Пусть ядра матричного оператора $\mathbf{N}$ и правые части $\mathbf{h}$ уравнения (3.16) непрерывно зависят от параметра $\gamma \in \Gamma_0$, где Γ_0 некоторый действительный отрезок. Пусть также $\|\mathbf{h}\| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}(\gamma)\|}}$. Тогда решение $\mathbf{u}(\gamma)$ уравнения (3.16) для $\gamma \in \Gamma_0$ существует, единственно и непрерывно зависит от параметра $\gamma \in \Gamma_0$.

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в системе дисперсионных уравнений (3.13) для нелинейного слоя, получаем известные уравнения для линейных задач о распространении ТЕ- и ТМ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью, а именно: $g_E(h, \gamma_E) = 0$, $g_M(h, \gamma_M) = 0$, где функции $g_E(h, \gamma_E)$, $g_M(h, \gamma_M)$ определены формулами (3.14), (3.15) (эти дисперсионные уравнения, определяющие собственные значения, хорошо известны и полностью изучены).

Для собственных значений γ_E и γ_M указанных линейных задач справедливы неравенства:

$$\max(\tau\varepsilon_1, \tau\varepsilon_3) < \gamma_E^2 < \tau\varepsilon_2, \quad \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma_M^2 < \varepsilon_2. \quad (3.18)$$

В задаче разыскиваются решения, удовлетворяющие этим же неравенствам.

Обозначим

$$\lambda_{s,m}^E := \tau\varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{4h^2}, \quad \lambda_{c,m}^E := \tau\varepsilon_2 - \frac{j_{c,m}^2}{4h^2}, \quad \lambda_{s,m}^M := \varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{4h^2}, \quad \lambda_{c,m}^M := \varepsilon_2 - \frac{j_{c,m}^2}{4h^2},$$

где $j_{s,m} = \pi m - m$ -й неотрицательный корень уравнения $\sin x = 0$, а $j_{c,m} = \frac{\pi(2m+1)}{2}$ - m -й положительный корень уравнения $\cos x = 0$; $m = 0, 1, 2, \dots$

Доказано, что если уравнение $g_E(h, \gamma_E) = 0$ имеет l_E корней $\gamma_E^{(1)}, \gamma_E^{(2)}, \dots, \gamma_E^{(l_E)}$, то существует целое число $0 < m_E < l_E$ такое, что

$$\begin{aligned} \gamma_E^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{s,i}^E}, \sqrt{\lambda_{c,i}^E} \right), \quad i = \overline{0, m_E - 1}; \\ \gamma_E^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{c,i}^E}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^E} \right), \quad i = \overline{m_E, l_E - 1}. \end{aligned}$$

Доказано, что если уравнение $g_M(h, \gamma_M) = 0$ имеет l_M корней $\gamma_M^{(1)}, \gamma_M^{(2)}, \dots, \gamma_M^{(l_M)}$, то существует целое число $0 < m_M < l_M$ такое, что

$$\begin{aligned} \gamma_M^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{s,i}^M}, \sqrt{\lambda_{c,i}^M} \right), \quad i = \overline{0, m_M - 1}; \\ \gamma_M^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda_{c,i}^M}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^M} \right), \quad i = \overline{m_M, l_M - 1}. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что уравнения $g_E(h, \gamma_E) = 0$ и $g_M(h, \gamma_M) = 0$ имеют l_E и l_M корней соответственно (выбором h всегда можно добиться того, что оба уравнения будут иметь корни, а одно из них будет иметь заданное число корней).

Точки $\sqrt{\lambda_{s,i}^E}, \sqrt{\lambda_{s,j}^M}$, $i = \overline{0, l_E}, j = \overline{0, l_M}$, являются простыми полюсами функций Грина (3.11), (3.12). Пусть $\delta_i^E > 0$ и $\delta_j^M > 0$, $i = \overline{0, l_E}$,

$j = \overline{0, l_M}$, – достаточно малые числа такие, что локализация собственных значений $\gamma_E^{(i)}$, $i = \overline{1, l_E}$ и $\gamma_M^{(j)}$, $j = \overline{1, l_M}$, линейных задач, указанная выше, не нарушается.

Построим отрезки

$$\begin{aligned}\Gamma_{i+1}^E &:= \left[\sqrt{\lambda_{s,i}^E} + \delta_i^E, \sqrt{\lambda_{c,i}^E} \right], & i = \overline{0, m_E - 1}; \\ \Gamma_{i+1}^E &:= \left[\sqrt{\lambda_{c,i}^E}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^E} - \delta_{i+1}^E \right], & i = \overline{m_E, l_E - 1}; \\ \Gamma_{i+1}^M &:= \left[\sqrt{\lambda_{s,i}^M} + \delta_i^M, \sqrt{\lambda_{c,i}^M} \right], & i = \overline{0, m_M - 1}; \\ \Gamma_{i+1}^M &:= \left[\sqrt{\lambda_{c,i}^M}, \sqrt{\lambda_{s,i+1}^M} - \delta_{i+1}^M \right], & i = \overline{m_M, l_M - 1}.\end{aligned}$$

При наших предположениях функция $g_E(\gamma_E)$ имеет различные знаки на концах отрезков Γ_i^E и обращается в нуль в точках $\gamma_E^{(i)}$. Тот же самый вывод имеет место для функции $g_M(\gamma_M)$. Обозначим $\Gamma := \Gamma^E \times \Gamma^M$, где $\Gamma^E := \bigcup_{i=1}^{l_E} \Gamma_i^E$, $\Gamma^M := \bigcup_{i=1}^{l_M} \Gamma_i^M$.

Основным результатом третьей главы является следующая

Теорема 3.4. Пусть $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$ и уравнения $g_E(h, \gamma_E) = 0$, $g_M(h, \gamma_M) = 0$ имеют l_E и l_M решений соответственно. Тогда найдется значение $\alpha_0 > 0$ такое, что для всякого $0 < \alpha \leq \alpha_0$ существует по крайней мере $l_E \cdot l_M$ парных собственных значений $(\gamma_E^{[i]}, \gamma_M^{[j]}) \in \Gamma_i^E \times \Gamma_j^M$, $i = \overline{1, l_E}$, $j = \overline{1, l_M}$, задачи P .

Из теоремы 3.4 следует, что при указанных предположениях существуют поверхностные связанные ТЕ-ТМ-волны, распространяющиеся вдоль границы изотропного слоя с керровской нелинейностью. Так как в линейном слое связанных волн не существует, то из утверждения теоремы следует, что в нелинейном слое существует новый режим распространения волн. При доказательстве теоремы 3.4 получена теоретическая оценка величины α_0 через нормы соответствующих операторов.

В главе 3 предложен и обоснован (доказана сходимость) итерационный метод нахождения приближенных парных собственных значений задачи P .

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

- [1] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2010.
- [2] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures. – Penza: PSU Press, 2011.

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК

- [3] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** К задаче о распространении нелинейных связанных электромагнитных ТЕ-ТМ-волн в слое // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54, № 3. – С. 504–518.
- [4] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation // J. Math. Phys. – 2013. – V. 54, № 8. – P. 083502-1–13.
- [5] **Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.** Расчет постоянных распространения неоднородных нелинейных двухслойных круглых цилиндрических волноводов методом задачи Коши // Радиотехн. и электроника. – 2013. – Т. 58, № 8. – С. 759–767.
- [6] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.** Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающая распространение ТЕ-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 7. – С. 1150–1161.
- [7] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Coupled electromagnetic transverse-electric-transverse magnetic wave propagation in a cylindrical waveguide with Kerr nonlinearity // J. Math. Phys. – 2013. – V. 54, № 4. – P. 043506-1–22.
- [8] **Valovik D.V.** On the problem of nonlinear coupled electromagnetic transverse electric-transverse magnetic wave propagation // J. Math. Phys. – 2013. – V. 54, № 4. – P. 042902-1–14.
- [9] **Валовик Д.В., Зарембо Е.В.** Решение нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с керровской нелинейностью, методом задачи Коши // Радиотехн. и электроника. – 2013. – Т. 58, № 1. – С. 69–72.
- [10] **Валовик Д.В., Зарембо Е.В.** Метод задачи Коши решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 1. – С. 74–89.
- [11] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity // J. Math. Phys. – 2012. – V. 53, № 12. – P. 123530-1–24.
- [12] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** О распространении связанных электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском слое с керровской нелинейностью // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2012. – № 4. – С. 21–48.

- [13] **Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглом диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2012. – № 3. – С. 29–37.
- [14] **Валовик Д.В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением // Радиотехн. и электроника. – 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1329–1335.
- [15] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1729–1739.
- [16] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Нелинейные эффекты в задаче о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью // Радиотехн. и электроника. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 309–314.
- [17] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом слое из нелинейного метаматериала // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2010. – № 3. – С. 71–87.
- [18] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (II. ТМ-волны) // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2010. – № 2. – С. 54–65.
- [19] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (I. ТЕ-волны) // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2010. – № 1. – С. 18–27.
- [20] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Расчет постоянных распространения и полей для поляризованных электромагнитных ТМ-волн в нелинейном анизотропном слое // Радиотехн. и электроника. – 2009. – Т. 54, № 4. – С. 411–417.
- [21] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2186–2194.
- [22] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Нелинейная задача на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 10. – С. 70–74.
- [23] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Расчет постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // Радиотехн. и электроника. – 2008. – Т. 53, № 8. – С. 934–940.
- [24] **Валовик Д.В.** О существовании решений нелинейной краевой задачи на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2008. – № 2. – С. 86–94.
- [25] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном анизотропном слое // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2007. – № 4. – С. 51–59.

Публикации в других журналах

- [26] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Boundary eigenvalue problem for Maxwell equations in a nonlinear dielectric layer // Appl. Math. – 2010. – № 1. – P. 29–36.
- [27] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Nonlinear effects of electromagnetic TM wave propagation in anisotropic layer with Kerr nonlinearity // Adv. Math. Phys. – 2012. – V. 2012. – P. 1–21.
- [28] **Valovik D.V.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures. Computational approach to determine propagation constants // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Volume 52: Inverse Problems and Large Scale computations, 2013, P. 71–91.
- [29] **Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu., Valovik D.V.** Nonlinear Double-Layer Bragg Waveguide: Analytical and Numerical Approaches to Investigate Waveguiding Problem // Adv. in Numer. Anal. – 2014. – V. 2014. – P. 1–11.

Редактор А. Г. Темникова
Технический редактор А. Г. Темникова
Компьютерная верстка Д. В. Валовика

Подписано в печать 10.08.2014. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.
Усл. печ. л. 1,63. Заказ № 008474 . Тираж 100.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru

