ОТЗЫВ

официального оппонента д. ф. – м. н., доцента Карчевского Е.М. на диссертационную работу Валовика Дмитрия Викторовича «Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Актуальность работы. Диссертация Валовика Д.В. посвящена исследованию разрешимости задач о распространении поляризованных электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском диэлектрическом слое, в котором диэлектрическая проницаемость произвольным образом зависит от модуля интенсивности электрического поля. С математической точки зрения указанные задачи являются весьма сложными и интересными. Это задачи о собственных значениях обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (систем таких уравнений) на оси, коэффициенты которых на отрезке нелинейно зависят от собственных функций.

Общая теория разрешимости таких задач не разработана, а доказательство существования их решений имеет важное прикладное значение. Исследуемые в диссертации задачи относятся к такой интересной и активно развивающейся области приложений теории нелинейных дифференциальных уравнений, как построение и обоснование математических моделей нелинейных оптических эффектов взаимодействия электромагнитных волн в оптических волноводах.

Активное экспериментальное изучение нелинейных оптических взаимодействий в тонкопленочных волноводах – ключевых элементах интегральной оптики – началось с начала семидесятых годов прошлого века. Тогда же были предложены и первые физические модели распространения поляризованных волн (отдельно для ТЕ-волн и отдельно для ТМ-волн) в волноводах с нелинейным слоем, зависимость диэлектрической проницаемости которого от электрического поля описывалась законом Керра. Позже было предложено несколько физических постановок задач для конкретных нелинейностей, учитывающих взаимодействие ТЕ- и ТМ-волн, распространяющихся вдоль слоя с нелинейной диэлектрической проницаемостью, расположенного между двумя полупространствами с постоянными диэлектрическими проницаемостями. Во всех этих постановках учитывалось взаимодействие волн, распространяющихся на одной частоте. Вместе с тем, широкое распространение получили физические модели генерации кратных гармоник в нелинейных оптических волноводах, описывающие взаимодействие волн, распространяющихся на разных частотах.

Первые математически строгие решения задач для ТЕ-волн, распространяющихся в нелинейном слое были получены еще в середине девяностых годов. Однако, никаких результатов о существовании связанных ТЕ- и ТМ волн получено не было, как не было предложено и общего метода решения таких задач, и не было получено общих результатов о существовании их решений. Что касается задачи о взаимодействии электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн, распространяющихся в нелинейном слое на двух разных частотах, то для нее не было предложено даже четкой физической постановки.

Таким образом, диссертация посвящена приложениям теории нелинейных дифференциальных уравнений к важному и слабо исследованному кругу задач о распространении электромагнитных волн. Тематика работы, несомненно, является актуальной.

Оценка содержания диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и четырех приложений. Во введении определяется тема, дается общая характеристика работы, делается обзор литературы по теме диссертации, ставится ее цель, излагается основное содержание работы, формулируются положения, выносимые на защиту, характеризуются публикации по теме работы и описывается ее апробация.

Первая глава посвящена исследованию разрешимости задачи, моделирующей распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое с произвольной нелинейностью. Математическая постановка задачи приводится в параграфе 1.1. Это спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на оси. Коэффициент при первой производной равен нулю. На отрезке от нуля до фиксированной точки коэффициент при искомой функции нелинейно зависит от ее квадрата, вне него принимает постоянные значения. Ограничения на функцию нелинейности, в частности, таковы, что решение задачи Коши на отрезке существует и единственно. Решение уравнения и его первая производная должны быть непрерывны в концах отрезка. Значения спектрального параметра, при которых существуют решения уравнения, равные в нуле фиксированной ненулевой постоянной, удовлетворяющие на оси указанным требованиям гладкости и убывающие на бесконечности, называются собственными значениями, а отвечающие им нетривиальные решения – собственными функциями.

Решения задачи имеют четкий физический смысл. Собственные значения – это постоянные распространения, при которых на одной фиксированной частоте в нелинейном слое распространяются TE-поляризованные собственные волны. Отвечающая собственному значению собственная функция – единственная ненулевая компонента вектора напряженности электрического TE-поляризованного поля, параллельная слою. Две ненулевые компоненты магнитного поля выражаются через собственные функции и собственные значения по явным формулам.

Далее в работе объясняется, почему необходимо рассматривать действительные значения спектрального параметра и предлагается разыскивать его квадрат в интервале, левая граница которого равна максимальному из постоянных значений коэффициента уравнения вне отрезка (они равны постоянным диэлектрическим проницаемостям верхнего и нижнего полупространств), правая граница равна линейной части коэффициента уравнения на отрезке (линейной части диэлектрической проницаемости слоя). Отмечается, что это условие соответствует классической задаче распространения TE-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью, поэтому используется при выводе дисперсионного уравнения для нелинейного слоя.

В параграфе 1.2 предполагается, что при некотором значении спектрального параметра из указанного интервала существует решение исходной задачи, и явно выписываются убывающие на бесконечности решения исследуемого уравнения (с постоянными коэффициентами) на левом и правом бесконечных интервалах. В нуле значение функции зафиксировано, а величина ее производной определяется явным решением слева. Решение задачи Коши на отрезке существует и единственно, а справа от отрезка также получено явное представление функции. Остается подобрать значения параметра так, чтобы выполнялись условия сопряжения на правом конце отрезка. На этом пути строится дисперсионное уравнение для собственных значений. Автор использует при этом методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и классического анализа. Центральным результатом параграфа 1.2 является теорема 1.1 (об эквивалентности). В ней утверждается, что для того чтобы значение искомого параметра было собственным значением исходной задачи необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем дисперсионного уравнения. Необходимость доказывается подробно, обоснование, по существу, заключается в выводе дисперсионного уравнения. В конце доказательства автор замечает, что каждый корень дисперсионного уравнения удовлетворяет всем условиям, указанным в формулировке исходной спектральной задачи.

В теореме 1.2 доказывается, что если собственная функция существует и имеет на отрезке более двух нулей, то она является периодической. Доказательство опирается на существование и единственность решения задачи Коши на отрезке и построение ее периодического решения. Теорема 1.2 проясняет суть выведенного в ходе доказательства теоремы 1.1 интегрального дисперсионного уравнения:

$$T_1 + nT_2 - h = 0.$$

Здесь h – длина отрезка, n – число нулей собственной функции в интервале $(0,h)$, T_1 – сумма расстояния от начала координат до первого нуля и расстояния от последнего нуля до h (если $n = 0$, то $T_1 = h$), T_2 – расстояние между соседними нулями. Указанные расстояния вычисляются по явным формулам, как определенные интегралы, зависящие от собственного значения, отвечающей ему собственной функции и коэффициентов уравнения. Важно, что эти интегралы не зависят от длины отрезка, а расстояние между соседними нулями постоянно.

В параграфе 1.3 доказывается существование изолированных собственных значений исходной задачи. Рассуждения основаны на применении теоремы 1.1., а именно, сначала описываются условия, достаточные для того, чтобы дисперсионное уравнение имело, по крайней мере, один корень. Построения опираются на то, что, как доказано в работе, левая часть однородного дисперсионного уравнения непрерывно зависит от искомого параметра на указанном интервале. Рассматривается две ситуации: эта функция ограничена и меняет знак (теорема 1.3), функция неограниченна сверху, но ее минимальное значение отрицательно (теорема 1.4). Далее к условиям теорем 1.3 и 1.4 добавляется дополнительное ограничение на функцию нелинейности исходного дифференциального уравнения: она должна быть аналитической функцией во всей комплексной плоскости. Тогда, как доказывается в теоремах 1.5 и 1.6, левая часть дисперсионного уравнения является аналитической функцией и, в условиях теорем его решения существуют и состоят из изолированных точек. Важно отметить, что каждый корень дисперсионного уравнения, для которого справедлива теорема 1.1 в части достаточности, является собственным значением исходной спектральной задачи.

Параграф 1.4 посвящен приложениям общей техники, развитой в предыдущих параграфах первой главы, к изучению двух типов нелинейностей: нелинейности Керра и нелинейности с насыщением. В случае нелинейности Керра нелинейная часть коэффициента уравнения на отрезке равна произведению квадрата искомой функции и заданного положительного коэффициента нелинейности. Если коэффициент нелинейности положить равным нулю, то получится хорошо известная линейная задача. В случае нелинейности с насыщением функция нелинейности равна частному двух функций. Числитель равен функции нелинейности Керра, а знаменатель равен сумме единицы и произведения квадрата искомой функции и заданного положительного второго коэффициента нелинейности. Если этот коэффициент положить равным нулю, то функция нелинейности с насыщением равна функции нелинейности Керра.

В каждом из рассмотренных случаев конкретизация функции нелинейности позволяет более полно исследовать первый интеграл. Детальный анализ дисперсионного уравнения позволяет получить новые результаты, в частности, доказывается, что в случае нелинейности Керра существует бесконечное число положительных корней дисперсионного уравнения с точкой накопления на бесконечности (теорема 1.7). При нелинейности с насыщением существует такая положительная константа, что для любого отрезка нелинейности коэффициента уравнения, имеющего длину, большую этой константы, существует конечное число положительных корней дисперсионного уравнения (теорема 1.8). Доказательство этих теорем опирается на оценки интегралов в дисперсионном уравнении.

Важно отметить, что, как доказывается в работе, в обоих случаях существуют корни дисперсионного уравнения, квадраты которых больше линейной части диэлектрической проницаемости слоя, т. е. лежащие вне интервала, зафиксированного при исходной постановке спектральной задачи в параграфе 1.1, и использованного при выводе дисперсионного уравнения. Их существование иллюстрируется и результатами приближенного вычисления в конкретных частных случаях. Опять подчеркнем, что каждый корень дисперсионного уравнения, для которого справедлива теорема 1.1 в части достаточности, является собственным значением исходной спектральной задачи.

Вторая глава посвящена исследованию разрешимости задачи, моделирующей распространение электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью. Для такой поляризации уже две компоненты вектора напряженности электрического поля отличны от нуля, и задача становится более сложной. Ее математическая постановка приводится в параграфе 2.1. Главное отличие этой задачи от рассмотренной в первой главе заключается в том, что она представляет собой задачу о собственных значениях системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Это технически осложняет исследование разрешимости задачи, которое проводится по схеме, предложенной в параграфах 1.1-1.3 первой главы.

Как и в первой главе при выводе дисперсионного уравнения автор придерживается предположения о том, что спектральный параметр принадлежит конечному интервалу. В данном случае это условие соответствует классической задаче распространения ТМ-волн в линейном слое с постоянной диэлектрической проницаемостью. Основной результат параграфа 2.1 – теорема 2.1 (об эквивалентности). В ней утверждается, что для того чтобы значение искомого параметра было собственным значением исходной задачи необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем дисперсионного уравнения. Необходимость доказывается подробно, обоснование заключается в аккуратном выводе дисперсионного уравнения. Оно осложнено, в частности, наличием нулей у собственных функций, и как следствие, наличием особых точек интегралов. Все препятствия на пути к цели автор тщательно преодолевает. В конце доказательства говорится, что всякий корень дисперсионного уравнения является собственным значением исходной спектральной задачи. В теореме 2.2 доказывается, что если одна из двух собственных функций существует и имеет на отрезке более двух нулей, то она является периодической.

В параграфе 2.3 доказывается существование изолированных собственных значений исходной задачи для ТМ-волн. Рассуждения основаны на применении теоремы 2.1., а именно, сначала описываются условия, достаточные для того, чтобы дисперсионное уравнение имело, по крайней мере, один корень. Построения основаны на том, что, как доказано в работе, левая часть однородного дисперсионного уравнения непрерывно зависит от искомого параметра на указанном интервале. Рассматривается две ситуации: эта функция ограничена и меняет знак (теорема 2.3), функция неограниченна сверху, но ее минимальное значение отрицательно (теорема 2.4).

Далее к условиям теорем 2.3 и 2.4 добавляются дополнительные требования аналитической зависимости от параметра функций нелинейности исходной системы дифференциальных уравнений, как функций комплексного переменного на всей комплексной плоскости. Тогда, как доказывается в теоремах 2.5 и 2.6, левая часть дисперсионного уравнения является аналитической функцией и в условиях теорем его решения существуют и состоят из изолированных точек. Важно отметить, что каждый корень дисперсионного уравнения, для которого справедлива теорема 2.1 в части достаточности, является собственным значением исходной спектральной задачи для системы дифференциальных уравнений.

В конце второй главы говорится, что при заданных функциях нелинейности дальнейшие результаты о собственных значениях могут быть получены при исследовании дисперсионного уравнения совместно с первым интегралом; а такое исследование позволит не только получить важную дополнительную информацию о собственных значениях, но и, возможно, ослабить ограничение принадлежности искомого параметра интервалу, фиксированному при исходной постановке задачи в параграфе 2.1. и использованному при выводе дисперсионного уравнения.

В последней, **третьей, главе** исследуется разрешимость задачи, моделирующей распространение на двух частотах связанных электромагнитных ТЕ-ТМ-волн в слое с Керровской нелинейностью. В этом случае возникает система трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на оси, коэффициенты которой на фиксированном отрезке нелинейно зависят от квадратов искомых функций. Постановка задачи приводится в параграфе 3.1. Пара чисел, такая, что при заданных в нуле ненулевых значениях двух из трех искомых функций существует убывающее на бесконечности решение системы, удовлетворяющее определенным свойствам гладкости, называется парным собственным значением. Отвечающее ему ненулевое решения системы – вектором собственных функций.

Далее в диссертации объясняется, почему разыскиваются вещественные парные собственные значения и говорится, что при выводе системы дисперсионных уравнений автор будет придерживаться предположения о том, что компоненты парных собственных значений принадлежат фиксированным интервалам. Эти интервалы определяются частотами, на которых распространяются связанные ТЕ- и ТМ-волны, диэлектрическими проницаемостями верхнего и нижнего полупространств и линейной частью диэлектрической проницаемости слоя. Описанные условия соответствуют классическим задачам распространения TE- и TM-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью.

В параграфе 3.2 осуществляется переход к интегральным уравнениям. Он основан на обращении линейных частей уравнений системы с использованием известных функций Грина краевых задач на отрезке для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Однако вывод далеко не тривиален и потребовал выполнения большого объема вычислительной работы. Автор отмечает, что нули построенной системы дисперсионных уравнений являются парными собственными значениями исходной задачи.

Система записывается в операторной форме, удобной для применения метода последовательных приближений, и изучается в пространстве непрерывных на отрезке функций. В параграфе 3.3 исследуются построенные интегральные операторы. На основе анализа свойств их ядер подробно доказывается, что все операторы ограничены.

В параграфе 3.4 устанавливается существование и единственность решения операторного уравнения. Сначала доказывается теорема 3.1, фактически, о том, что при фиксированной толщине нелинейного слоя можно построить шар с центром в нуле достаточно большого радиуса так, что затем можно выбрать такой достаточно малый коэффициент нелинейности Керра, что в указанном шаре существует единственное решение операторного уравнения. Далее проводится более тонкий анализ операторного уравнения, и в теореме 3.2 доказывается, что существует шар такого независящего от коэффициента нелинейности и толщины слоя радиуса, что для некоторой ограниченной толщины нелинейного слоя можно подобрать такой достаточно малый коэффициент нелинейности, что решение уравнения в указанном шаре существует и единственно. В формулировках теорем точно выписываются соответствующие оценки, а доказательства теорем опираются на принцип сжимающих отображений.

В параграфе 3.5 доказывается теорема 3.3 о том, что если ядра изучаемого интегрального оператора и правая часть операторного уравнения непрерывно зависят от спектрального параметра на некотором отрезке и справедлива выписанная в формулировке теоремы оценка нормы правой части сверху через норму интегрального оператора и коэффициент нелинейности, то решение операторного уравнения для всех значений параметра из отрезка существует, единственно и непрерывно зависит от спектрального параметра на этом отрезке. Существование и единственность решения следуют из теоремы 3.2, а доказательство непрерывной зависимости решения от спектрального параметра основано на оценке сверху нормы разности решений, отвечающих двум разным значениям параметра из указанного отрезка.

В параграфе 3.6 доказывается существование парных собственных значений задачи о распространении на двух частотах связанных электромагнитных TE-TM-волн в слое с Керровской нелинейностью (терема 3.4). Рассуждения основаны на утверждении о том, что нули системы дисперсионных уравнений, являются парными собственными значениями исходной спектральной задачи. Доказывается, что корни системы дисперсионных уравнений существуют при достаточно малых значениях коэффициента нелинейности.

В параграфе 3.7 для вычисления корней системы дисперсионных уравнений предлагается использовать метод последовательных приближений. Сначала доказывается теорема 3.5 о сходимости приближенных решений операторного уравнения к единственному точному решению этого уравнения. Доказательство этой теоремы сводится к доказательству теоремы 3.1. Затем в теореме 3.6 доказывается существование приближенных корней системы дисперсионных уравнений, а в теореме 3.7 – сходимость приближенных корней к точным парным собственным значениям. В конце параграфа приводятся результаты вычислений приближенных парных собственных значений для коэффициента нелинейности равного одной тысячной.

Научная новизна работы. Все основные результаты работы являются новыми, и заключаются в следующем.

1. Дана новая математически строгая постановка задачи о взаимодействии поляризованных электромагнитных TE- и TM-волн, распространяющихся в плоском нелинейном диэлектрическом слое на двух разных частотах.

2. Для решения задач о распространении TE- и TM-волн в плоском диэлектрическом слое, в котором диэлектрическая проницаемость произвольным образом зависит от модуля интенсивности электрического поля, задачи о распространении на двух частотах связанных электромагнитных TE-TM-волн в слое с Керровской нелинейностью предложен и обоснован новый математический аппарат – метод интегральных дисперсионных уравнений.

3. Доказаны теоремы существования решений поставленных в работе спектральных задач для нелинейных дифференциальных уравнений, описаны качественные характеристики этих решений, важные для приложений в теории распространения электромагнитных волн.

Значимость для науки и практики. Прежде всего, работа представляет собой существенный вклад в теорию нелинейных оптических волноводов. Метод интегральных дисперсионных уравнений, предложенный и развитый автором для доказательства разрешимости нелинейных спектральных задач теории оптических волноводов, существенно расширяет класс математических моделей, допускающих эффективное аналитическое исследование. Доказано существование и вычислены приближенно постоянные распространения собственных волн ряда нелинейных тонкопленочных волноводов, используемых на практике.

Кроме того, метод интегральных дисперсионных уравнений имеет и самостоятельное математическое значение, поскольку может быть применен для исследования различных задач (на собственные значения и краевых) для нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка и систем таких уравнений.

Основные результаты диссертации опубликованы в 29 работах, в том числе – в двух монографиях, 23 статьях в изданиях из перечня ВАК (из них 6 работ без соавторов); 4 статьях в других изданиях (из них 1 работа без соавторов).

Достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы обеспечена корректной постановкой задач, строгими математическими доказательствами, сопоставлением полученных в работе результатов с результатами точных решений линейных задач.

Замечания по работе

1. В доказательстве теоремы 1.1 (об эквивалентности) подробное обоснование достаточности заменено ссылкой на очевидность этого факта. Вместе с тем было бы уместно подробнее написать о том, почему корню дисперсионного уравнения (1.16), с. 29, отвечает собственное значение исходной спектральной задачи, какая именно собственная функция ему соответствует, и в каком интервале принадлежности спектрального параметра сохраняется эквивалентность. Этот вопрос приобретает особую актуальность в связи с тем, что для частных случаев задачи с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением в параграфе 1.4 найдены корни диспер-

сионного уравнения, которые лежат вне интервала зафиксированного (см. с. 27, 4 стр. сверху) при выводе дисперсионного уравнения.

2. На с. 72, 10 стр. снизу, доказательство утверждения о том, что всякий корень дисперсионного уравнения (2.20), с. 66, является собственным значением исходной спектральной задачи, было бы желательно провести более подробно.

3. На с. 98, 2 стр. снизу, отмечается, что нули системы дисперсионных уравнений (3.37), с. 98, являются парными собственными значениями исходной спектральной задачи, однако соответствующее утверждение в виде теоремы не формулируется и более подробно не доказывается.

Кроме указанных замечаний, можно высказать два пожелания по дальнейшему развитию метода интегральных дисперсионных уравнений. Представляется интересным исследовать вопросы существования ТМ-волн при конкретных функциях нелинейности, а также существования связанных ТЕ- и ТЕ-волн, ТМ- и ТМ-волн, распространяющихся вдоль нелинейного слоя на двух разных частотах.

<u>Заключение по диссертационной работе</u>

Диссертация Д.В. Валовика представляет собой законченную научную квалификационную работу. Она выполнена в актуальной области приложений теории нелинейных дифференциальных уравнений на высоком теоретическом уровне. В ней решен ряд задач, имеющих принципиальное научное значение для теории нелинейных оптических волноводов. Основные результаты являются новыми, их достоверность подтверждается достаточно подробными и строгими математическими доказательствами, а также результатами численных экспериментов. Практическая ценность результатов диссертации также не вызывает сомнения. Это, в частности, подтверждается и примерами приложений, содержащимися в работе.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут быть использованы при подготовке лекций по курсам «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Уравнения в частных производных», «Математическое моделирование в электродинамике и акустике», а также различных спецкурсов по теории краевых задач и задач на собственные значения на математических специальностях университетов.

Считаю, что диссертация Валовика Дмитрия Викторовича «Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое», удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по указанной специальности.

Профессор кафедры прикладной математики
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»,
доктор физ.-мат. наук, доцент Карчевский Е.М.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ОГРН 1021602841391 УПРАВЛЕНИЕ ДиК
ПОДПИСЬ
Карчевского Е. М. заверяю
Документовед
09.09.2014г.

420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет».
Тел. (843) 233-71-09.
Факс: (843) 292-44-48.
e-mail: public.mail@kpfu.ru