

УДК 514.824, 514.763.62

© Соловьев А. В., 2025

ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ПСЕВДОФИНСЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХСоловьев А. В.^{a,1}^a МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119991, Россия.

Рассматриваются n -мерные ориентированные псевдофинслеровы многообразия с “ m th root” метриками. На этих многообразиях определяются естественные формы объема. Они существенным образом зависят от четности натурального числа $m > 1$ и выражаются через гипердетерминанты Кэли. С помощью введенных естественных форм объема определяются инвариантные интегралы от финитных функций по n -мерным ориентированным псевдофинслеровым многообразиям с “ m th root” метриками.

Ключевые слова: формы объема, псевдофинслеровы многообразия, “ m th root” метрики, гипердетерминанты Кэли.

INVARIANT INTEGRATION ON PSEUDO-FINSLERIAN MANIFOLDSSolov'yov A. V.^{a,1}^a M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.

We consider n -dimensional oriented pseudo-Finslerian manifolds with m th root metrics. Natural volume forms on these manifolds are defined. The natural volume forms depend on the parity of the positive integer $m > 1$ and are expressed in terms of Cayley hyperdeterminants. With the help of the introduced natural volume forms, we define invariant integrals of finite functions over n -dimensional oriented pseudo-Finslerian manifolds with m th root metrics.

Keywords: volume forms, pseudo-Finslerian manifolds, m th root metrics, Cayley hyperdeterminants.

PACS: 04.50.+h, 02.30.Cj

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2025.1.150-153

Введение

Среди неримановых модификаций общей теории относительности все чаще встречаются релятивистские модели гравитации, основанные на финслеровой геометрии [1]. Наиболее реалистичные из них используют *псевдофинслеровы* многообразия в качестве пространственно-временного фона. Однако в финслеровой геометрии с индефинитной метрикой отсутствует общепринятое определение инвариантного элемента объема: стандартное определение [2] в этом случае становится неприменимым. Имеется в виду *естественный* элемент объема, порождаемый самой метрикой. Без такого элемента объема невозможно определить инвариантный интеграл по псевдофинслерову многообразию, что необходимо для задания функционала действия в теории поля и вычисления вероятностей в квантовой теории.

В этой статье определяется инвариантное интегрирование на n -мерных ориентированных псевдофинслеровых многообразиях с так называемыми “ m th root” метриками

$$ds^m = g_{i_1 i_2 \dots i_m} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_m} \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

¹E-mail: solovyovav@my.msu.ru

где $m > 1$, $g_{i_1 i_2 \dots i_m} = g_{i_1 i_2 \dots i_m}(x^1, \dots, x^n)$ — компоненты симметричного ковариантного тензорного поля (метрического тензора) в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$, а все индексы независимо друг от друга пробегает значения $1, 2, \dots, n$.

1. Естественные формы объема и инвариантные интегралы

Пусть (M^n, ds^m) — n -мерное ориентированное многообразие M^n , снабженное псевдофинслеровой метрикой (1). Поскольку интегралы от дифференциальных форм на M^n автоматически инвариантны относительно преобразований координат, достаточно определить естественную форму объема на (M^n, ds^m) , порождаемую метрикой (1). Как известно [3], формой объема на M^n называется дифференциальная n -форма $\omega = \omega_{12\dots n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$, у которой всюду $\omega_{12\dots n} = \omega_{12\dots n}(x^1, \dots, x^n) > 0$. Наша задача — выразить $\omega_{12\dots n}$ через $g_{i_1 i_2 \dots i_m}$ с сохранением их трансформационных свойств.

Прежде всего заметим, что

$$\omega'_{12\dots n} = \omega_{12\dots n} \det \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right] \quad (2)$$

при координатных преобразованиях $x^j = x^j(x'^1, \dots, x'^n)$, где $\det \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right] > 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). С другой стороны,

$$g'_{i_1 i_2 \dots i_m} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x'^{i_2}} \dots \frac{\partial x^{j_m}}{\partial x'^{i_m}} g_{j_1 j_2 \dots j_m} \quad (3)$$

при тех же преобразованиях. Рассмотрим следующую свертку

$$G'_{i_1^1 i_2^1 \dots i_n^1} = \varepsilon^{i_1^2 i_2^2 \dots i_n^2} \dots \varepsilon^{i_1^m i_2^m \dots i_n^m} g'_{i_1^1 i_2^1 \dots i_m^1} g'_{i_2^2 i_2^2 \dots i_m^2} \dots g'_{i_n^1 i_n^1 \dots i_m^m}, \quad (4)$$

где $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$ — n -мерный символ Леви-Чивиты ($\varepsilon^{12\dots n} = 1$), а индексы с двумя номерами пробегает значения $1, 2, \dots, n$. Подставляя (3) в (4), получаем

$$G'_{i_1^1 \dots i_n^1} = \left(\det \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right] \right)^{m-1} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_n}}{\partial x'^{i_n}} G_{j_1^1 \dots j_n^1}, \quad (5)$$

где $G_{j_1^1 \dots j_n^1} = \varepsilon^{j_1^2 \dots j_n^2} \dots \varepsilon^{j_1^m \dots j_n^m} g_{j_1^1 j_1^1 \dots j_m^1} \dots g_{j_n^1 j_n^1 \dots j_m^m}$ (подробности вычислений см. в [4]). Формула (5) является законом преобразования тензорной плотности веса $m-1$. Нетрудно видеть, что $G'_{i_1^1 i_2^1 \dots i_n^1}$ и $G_{j_1^1 j_2^1 \dots j_n^1}$ антисимметричны по любой паре индексов при четном $m > 0$ и симметричны — при нечетном $m > 1$.

Предположим, что $m > 0$ — четное число. Примем по определению $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$. Тогда

$$G'_{i_1^1 i_2^1 \dots i_n^1} = \varepsilon_{i_1^1 i_2^1 \dots i_n^1} G'_{12\dots n}, \quad G_{j_1^1 j_2^1 \dots j_n^1} = \varepsilon_{j_1^1 j_2^1 \dots j_n^1} G_{12\dots n}. \quad (6)$$

Кроме того, введем обозначения:

$$\begin{aligned} \text{hdet}[g'_{i_1 i_2 \dots i_m}] &\equiv G'_{12\dots n} = \varepsilon^{i_1^2 i_2^2 \dots i_n^2} \dots \varepsilon^{i_1^m i_2^m \dots i_n^m} g'_{i_1^1 \dots i_m^1} g'_{i_2^2 \dots i_m^2} \dots g'_{i_n^1 \dots i_m^m}, \\ \text{hdet}[g_{i_1 i_2 \dots i_m}] &\equiv G_{12\dots n} = \varepsilon^{j_1^2 j_2^2 \dots j_n^2} \dots \varepsilon^{j_1^m j_2^m \dots j_n^m} g_{j_1^1 \dots j_m^1} g_{j_2^2 \dots j_m^2} \dots g_{j_n^1 \dots j_m^m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Примечательно, что однородные многочлены типа (7) изучались А. Кэли во второй части статьи [5]. Позднее он стал называть их *гипердетерминантами*. Вычислим свертку $\varepsilon^{i_1^1 i_2^1 \dots i_n^1} G'_{i_1^1 i_2^1 \dots i_n^1}$. С помощью (5), (6) и (7) находим

$$\text{hdet}[g'_{i_1 i_2 \dots i_m}] = \left(\det \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right] \right)^m \text{hdet}[g_{i_1 i_2 \dots i_m}]. \quad (8)$$

Из (8) немедленно следует $|\text{hdet}[g'_{i_1 i_2 \dots i_m}]|^{1/m} = |\text{hdet}[g_{i_1 i_2 \dots i_m}]|^{1/m} \det \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right]$, что совпадает с (2) если положить $\omega'_{12\dots n} = |\text{hdet}[g'_{i_1 i_2 \dots i_m}]|^{1/m}$ и $\omega_{12\dots n} = |\text{hdet}[g_{i_1 i_2 \dots i_m}]|^{1/m}$. Поэтому естественную форму объема на (M^n, ds^m) при четном $m > 0$ и $\text{hdet}[g_{i_1 i_2 \dots i_m}] \neq 0$ можно определить формулой

$$\omega = |\text{hdet}[g_{i_1 i_2 \dots i_m}]|^{1/m} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (9)$$

В частном случае $m = 2$ дифференциальная n -форма (9) превращается в стандартную псевдори-манову форму объема $\omega = |\det[g_{i_1 i_2}]|^{1/2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, так как согласно (7) $\text{hdet}[g_{i_1 i_2}] = \det[g_{i_1 i_2}]$.

Предположим, что $m > 1$ — *нечетное* число. Теперь свертка $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} G'_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ для любых $g'_{i_1 i_2 \dots i_m}$ и определение (9) теряет всякий смысл. Тем не менее можно повторить предыдущие построения, отталкиваясь не от (3), а сразу от закона преобразования (5). Именно, рассмотрим свертку

$$\tilde{G}'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \dots \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} G'_{i_1 i_2 \dots i_n} G'_{i_1 i_2 \dots i_n} \dots G'_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (10)$$

Подставим (5) в (10). Прямые вычисления показывают [4], что

$$\tilde{G}'_{i_1 \dots i_n} = \left(\det \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right] \right)^{mn-1} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_n}}{\partial x'^{i_n}} \tilde{G}_{j_1 \dots j_n}, \quad (11)$$

где $\tilde{G}_{j_1 \dots j_n} = \varepsilon^{j_1^2 \dots j_n^2} \dots \varepsilon^{j_1^2 \dots j_n^2} G_{j_1 j_2 \dots j_n} \dots G_{j_1 j_2 \dots j_n}$. Очевидно, $\tilde{G}'_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и $\tilde{G}_{j_1 j_2 \dots j_n}$ антисимметричны по любой паре индексов при *четном* $n > 0$. В этом случае

$$\tilde{G}'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \tilde{G}'_{12 \dots n}, \quad \tilde{G}_{j_1 j_2 \dots j_n} = \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \tilde{G}_{12 \dots n}. \quad (12)$$

Используем прежние обозначения для гипердетерминантов:

$$\begin{aligned} \text{hdet}[G'_{i_1 i_2 \dots i_n}] &\equiv \tilde{G}'_{12 \dots n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \dots \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} G'_{i_1 i_2 \dots i_n} G'_{i_1 i_2 \dots i_n} \dots G'_{i_1 i_2 \dots i_n}, \\ \text{hdet}[G_{i_1 i_2 \dots i_n}] &\equiv \tilde{G}_{12 \dots n} = \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \dots \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} G_{j_1 j_2 \dots j_n} G_{j_1 j_2 \dots j_n} \dots G_{j_1 j_2 \dots j_n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вычисляя свертку $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \tilde{G}'_{i_1 i_2 \dots i_n}$, с помощью (11), (12) и (13) получаем

$$\text{hdet}[G'_{i_1 i_2 \dots i_n}] = \left(\det \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right] \right)^{mn} \text{hdet}[G_{i_1 i_2 \dots i_n}]. \quad (14)$$

Из (14) немедленно следует $|\text{hdet}[G'_{i_1 i_2 \dots i_n}]|^{1/(mn)} = |\text{hdet}[G_{i_1 i_2 \dots i_n}]|^{1/(mn)} \det \left[\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right]$, что совпадает с (2) если положить $\omega'_{12 \dots n} = |\text{hdet}[G'_{i_1 i_2 \dots i_n}]|^{1/(mn)}$ и $\omega_{12 \dots n} = |\text{hdet}[G_{i_1 i_2 \dots i_n}]|^{1/(mn)}$. Поэтому естественную форму объема на (M^n, ds^m) при нечетном $m > 1$, четном $n > 0$ и $\text{hdet}[G_{i_1 i_2 \dots i_n}] \neq 0$ можно определить формулой

$$\omega = |\text{hdet}[G_{i_1 i_2 \dots i_n}]|^{1/(mn)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (15)$$

Теперь не составляет никакого труда дать определение инвариантного интеграла от функции по псевдофинслерову многообразию (M^n, ds^m) . Это делается обычным для теории дифференциальных форм способом. Пусть, например, функция f непрерывна и равна нулю вне карты с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$. Тогда по определению

$$\int_{M^n} f \omega \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x^1, \dots, x^n) \omega_{12 \dots n} dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (16)$$

где форма объема ω выражается формулой (9) при четном $m > 0$ и формулой (15) — при нечетном $m > 1$ и четном $n > 0$. Более сложные случаи интегрирования требуют очевидных модификаций (16).

Заключение

Таким образом, определен инвариантный интеграл (16) от финитной функции f по n -мерному ориентированному псевдофинслерову многообразию (M^n, ds^m) с “ m th root” метрикой (1) относительно естественной формы объема ω . Показано, что ω при четном $m > 0$ и натуральном $n > 1$ имеет вид (9), а при нечетном $m > 1$ и четном $n > 0$ имеет вид (15). Интересно, что во всех случаях естественная форма объема ω на (M^n, ds^m) выражается через гипердетерминанты Кэли (7) или (13).

Автор посвящает эту статью своему отцу, Василию Ивановичу Соловьеву, по случаю его юбилея.

Список литературы

1. Lämmerzahl C., Perlick V. Finsler geometry as a model for relativistic gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 2018. V. 15. № supp01. P. 1850166.
2. Busemann H. Intrinsic area. *Annals of Mathematics*. 1947. V. 48. № 2. P. 234–267.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии, т. I*. М.: Наука, 1981.
4. Solov'yov A.V. Natural volume forms on pseudo-Finslerian manifolds with m th root metrics. *Russ. J. Math. Phys.* 2024. V. 31. № 2. P. 317–324.
5. Cayley A. On the theory of determinants. *Trans. Camb. Philos. Soc.* 1843. V. VIII. P. 75–88.

References

1. Lämmerzahl C., Perlick V. Finsler geometry as a model for relativistic gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 2018, vol. 15, no. supp01, pp. 1850166.
2. Busemann H. Intrinsic area. *Annals of Mathematics*, 1947, vol. 48, no. 2, pp. 234–267.
3. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry, vol. I*. N.Y.: John Wiley & Sons, 1996.
4. Solov'yov A.V. Natural volume forms on pseudo-Finslerian manifolds with m th root metrics. *Russ. J. Math. Phys.*, 2024, vol. 31, no. 2, pp. 317–324.
5. Cayley A. On the theory of determinants. *Trans. Camb. Philos. Soc.*, 1843, vol. VIII, pp. 75–88.

Авторы

Соловьев Антон Васильевич, к.ф.-м.н., доцент, Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия.
E-mail: solovyovav@my.msu.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Соловьев А.В. Инвариантное интегрирование на псевдофинслеровых многообразиях. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2025. № 1. С. 150–153.

Authors

Solov'yov Anton Vasil'evich, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: solovyovav@my.msu.ru

Please cite this article in English as:

Solov'yov A. V. Invariant integration on pseudo-Finslerian manifolds. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2025, no. 1, pp. 150–153.