

**Программа утверждена на заседании кафедры теории вероятностей
Протокол № 6 от 18 января 2015 г.**

Рабочая программа дисциплины (модуля)

1. Код и наименование дисциплины (модуля): АКТУАРНЫЕ МОДЕЛИ (Actuarial Models).
2. Уровень высшего образования – специалитет.
3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.
4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.
Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.
5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)
6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:
Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62*) часа составляет самостоятельная работа студента.
** - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*
7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

- 1) освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру, теорию вероятностей, случайные процессы, математическую статистику, английский язык;
- 2) обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики, основные термины математики, статистики и теории вероятностей на английском языке.

- 3) Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей, случайных процессов, математической статистики и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач, читать и переводить на русский язык математическую литературу на английском языке, уметь излагать математические рассуждения на английском языке.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	.Всего (часы)	В том числе							
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					Самостоятельная работа обучающегося, часы из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п.

Тема 1	6	2					2	4		4
Тема 2	6	2					2	4		4
Тема 3	6	2					2	4		4
Тема 4	6	2					2	4		4
Тема 5	6	2					2	4		4
Тема 6	6	2					2	4		4
Тема 7	6	2					2	4		4
Тема 8	6	2					2	4		4
Текущий контроль успеваемости	6					2	2	4		4
Тема 9	6	2					2	4		4
Тема 10	6	2					2	4		4
Тема 11	6	2					2	4		4
Тема 12	6	2					2	4		4
Тема 13	6	2					2	4		4
Тема 14	6	2					2	4		4
Тема 15	6	2					2	4		4

Тема 16	4						0	4		4
Тема 17	2							2		2
Промежуточная аттестация <u>экзамен</u>	8 (6*)					2	2	6(4*)		6 (4*)
Итого	108	30				4	34	74		74

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

- Перечень компетенций:
- Описание шкал оценивания:
экзамен с оценкой по пятибалльной шкале
- Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
- Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитория для проведения лекционных занятий, оборудованная интерактивной доской (например, Hitachi Starboard FX-Trio-77E), монитором с диагональю 150 см (минимум), проектором и проекционным экраном; ноутбук; кабинет для подготовки к лекциям, проведения консультаций, хранения учебных материалов; принтер; бумага, картриджи к принтеру; книги и журналы, рекомендованные для курса, в библиотеке.

.

13. Язык преподавания: (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. АКТУАРНЫЕ МОДЕЛИ (Actuarial Models).
2. Преподаватель – д.ф.м.н., проф. Г.И.Фалин
3. Аннотация курса: курс основан на требованиях профессиональных квалификационных экзаменов С «Construction and Evaluation of Actuarial Models» Общества Актуариев США и СТ4 “Models” Института и Факультета Актуариев Великобритании. Излагаемый материал покрывает разделы:
 - A. Severity Models, B. Frequency Models, C. Aggregate Models, D. Coverage Modifications and Inflation, E. Risk Measures, J. Simulation курса С (около 25-30% программы экзамена С);
 - (i) Principles of actuarial modelling (около 5% программы экзамена СТ4).
4. Тематическое содержание курса

Тема 1	Принципы актуарного моделирования. Почему и как используются модели. Преимущества и ограничения моделей. Стохастические и детерминистические модели. Роль теоретических распределений в страховании. Дискретное и непрерывное время/пространство состояний. Краткосрочное и долгосрочное моделирование. Анализ и интерпретация результатов. Чувствительность модели. Разделение потерь по договору на частоту наступления страховых случаев и тяжесть страхового случая.
Тема 2	Дискретные и непрерывные модели для тяжести страхового случая. Основные распределения, используемые в страховании для моделирования тяжести страховых случаев: равномерное, экспоненциальное, гамма, Парето, Вейбулла, лог-нормальное, их характеристики (плотность, функция распределения, моменты, преобразование Лапласа, производящая функция моментов, квантили, перцентили). Численные расчёты с помощью Microsoft Excel.
Тема 3	Неоднородность страхового портфеля. Рандомизация. Распределение Парето как рандомизированное экспоненциальное распределение.
Тема 4	Задачи экзамена С «Construction and Evaluation of Actuarial Models» прошлых лет по теме «Severity Models».
Тема 5	Моделирование специальных условий договоров страхования. Страхование превышения потерь, простой вычет, возвращаемый вычет, уменьшающийся вычет, коэффициент уменьшения потерь (LER). Ограничение размера выплаты. Пропорциональное сострахование. Влияние инфляции на размер ожидаемой выплаты, эффект рычага. Сложные комбинации условий договора.
Тема 6	Задачи экзамена С «Construction and Evaluation of Actuarial Models» прошлых лет по теме «Coverage Modifications and Inflation»

Тема 7	Статическая модель для числа страховых случаев за фиксированный промежуток времени. Биномиальная модель. Распределение Пуассона как предельный случай биномиального. Отрицательное биномиальное распределение как рандомизированное пуассоновское. Их свойства. Распределения типа $(a,b,0)$ и $(a,b,1)$. Влияние вычетов и других ограничений на частоту страховых выплат.
Тема 8	Динамическая модель для числа страховых случаев. Пуассоновский процесс. Эквивалентные определения и основные свойства. Неоднородный пуассоновский процесс.
Тема 9	Задачи экзамена С «Construction and Evaluation of Actuarial Models» прошлых лет по теме «Frequency Models».
Тема 10	Модель индивидуального риска. Точный расчёт вероятности разорения. Приближение на основе ЦПТ. VaR. Простейшие принципы назначения страховых премий.
Тема 11	Модель коллективного риска. Точный расчёт вероятности разорения. Рекурсия Панджера. Составное пуассоновское и составное отрицательное биномиальное распределения. Объединение/расщепление портфеля в пуассоновской модели. Приближения (гауссовское, гамма, метод эквивалентных замен).
Тема 12	Меры риска, их виды (связанные с премиями, капиталом: VaR, CTE). Когерентные меры. PH-преобразование. Построение мер риска с помощью искажающих функций.
Тема 13	Задачи экзамена С «Construction and Evaluation of Actuarial Models» прошлых лет по темам «Aggregate Models» и «Risk Measures».
Тема 14	Метод Монте-Карло. Метод обращения функции распределения. Моделирование дискретных случайных величин. Алгоритмы моделирования величин, распределённых по закону Пуассона, отрицательному биномиальному. Моделирование непрерывных случайных величин. Метод отбора (метод принятия-отклонения). Применение для моделирования нормально распределённой величины.
Тема 15	Моделирование нормально распределённой величины: применение ЦПТ, Метод Бокса-Мюллера, полярный метод.
Тема 16	Анализ моделей индивидуального риска и коллективного риска методом Монте-Карло. Оценка точности.
Тема 17	Задачи экзамена С «Construction and Evaluation of Actuarial Models» прошлых лет по теме «Simulation».

5. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

Вопросы к экзамену:

1. Принципы актуарного моделирования. Почему и как используются модели. Преимущества и ограничения моделей.
2. Стохастические и детерминистические модели. Дискретное и непрерывное время/пространство состояний. Краткосрочное и долгосрочное моделирование.
3. Роль теоретических распределений в страховании. Анализ и интерпретация результатов. Чувствительность модели.
4. Разделение потерь по договору на частоту наступления страховых случаев и тяжесть страхового случая.
5. Дискретные и непрерывные модели для тяжести страхового случая. Равномерное, экспоненциальное, гамма распределение. Их характеристики (плотность, функция распределения, моменты, преобразование Лапласа, производящая функция моментов, квантили, перцентили). Численные расчёты с помощью Microsoft Excel.
6. Распределение Парето, Вейбулла, лог-нормальное. Их характеристики (плотность, функция распределения, моменты, преобразование Лапласа, производящая функция моментов, квантили, перцентили). Численные расчёты с помощью Microsoft Excel.
7. Неоднородность страхового портфеля. Рандомизация.
8. Распределение Парето как рандомизированное экспоненциальное распределение.
9. Моделирование специальных условий договоров страхования. Страхование превышения потерь, простой вычет,
10. Возвращаемый вычет, уменьшающийся вычет, коэффициент уменьшения потерь (LER).
11. Ограничение размера выплаты. Пропорциональное сострахование.
12. Влияние инфляции на размер ожидаемой выплаты, эффект рычага.
13. Статическая модель для числа страховых случаев за фиксированный промежуток времени. Биномиальная модель. Распределения Пуассона как предельный случай биномиального.
14. Отрицательное биномиальное распределение как рандомизированное пуассоновское.
15. Распределения типа $(a,b,0)$ и $(a,b,1)$.
16. Влияние вычетов и других ограничений на частоту страховых выплат.
17. Динамическая модель для числа страховых случаев. Пуассоновский процесс. Эквивалентные определения.
18. Основные свойства процесса Пуассона.
19. Неоднородный пуассоновский процесс.
20. Модель индивидуального риска. Точный расчёт вероятности разорения.
21. Приближение для вероятности разорения в модели индивидуального на основе ЦПТ. VaR.
22. Простейшие принципы назначения страховых премий.
23. Модель коллективного риска. Составное пуассоновское и составное отрицательное биномиальное распределения. Точный расчёт вероятности разорения.

24. Рекурсия Панджера.
25. Объединение/расщепление портфеля в пуассоновской модели.
26. Приближения (гауссовское, гамма, метод эквивалентных замен) для вероятности разорения в модели коллективного риска.
27. Меры риска, их виды (связанные с премиями, капиталом: VaR, CTE).
28. Когерентные меры риска.
29. РН-преобразование.
30. Построение мер риска с помощью искажающих функций.
31. Метод Монте-Карло. Метод обращения функции распределения. Моделирование дискретных случайных величин. Алгоритмы моделирования величин, распределённых по закону Пуассона, отрицательному биномиальному.
32. Моделирование непрерывных случайных величин (экспоненциальной, Парето).
33. Метод отбора (метод принятия-отклонения). Применение для моделирования нормально распределённой величины.
34. Моделирование нормально распределённой величины с помощью ЦПТ.
35. Метод Бокса-Мюллера моделирования нормально распределённой величины.
36. Полярный метод моделирования нормально распределённой величины.
37. Анализ моделей индивидуального риска и коллективного риска методом Монте-Карло. Оценка точности.

Экзаменационные билеты (билеты к устному зачету) формируются в виде двух вопросов (А и Б) из указанного списка и одной задачи (В), примеры задач см. далее.

Примеры задач:

1. Потери распределены на отрезке $[0;120]$ в соответствии с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0.01, & 0 \leq x \leq 80, \\ -0.0025x + 0.03, & 80 \leq x \leq 120 \end{cases}.$$

Вычислите LER для простого вычета $d = 20$.

2. Тяжесть страхового случая по договору страхования ответственности владельцев автомобилей является случайной величиной с функцией распределения $F(x) = 1 - 0.8e^{-0.02x} - 0.2e^{-0.001x}, x \geq 0$. Выплаты страховщика по каждому страховому случаю ограничены суммой 1000. Вычислите средний размер выплаты страховой компании по одному страховому случаю.

3. Страховая компания Sunny Daze Insurance Company (SDIC) продаёт полисы страхования автомобилей от актов вандализма. Ежемесячное число заявлений о страховых случаях является случайной величиной со средним 110 и дисперсией 750. Потери по одному заявлению в среднем равны 1101 со стандартным отклонением 70. Число заявлений и размеры индивидуальных потерь являются независимыми величинами. Используя нормальное приближение подсчитайте вероятность того, что суммарные потери страховщика по актам автовандализма за один месяц будут меньше 100,000.

4. Размер годового бонуса для страховой агента зависит от отношения суммарных потерь по полисам, проданным им за год, к общей сумме премий по этим полисам. Если это отношение больше или равно 60% бонус не платится. Если же оно меньше 60%, то размер бонуса составляет определённый процент от общей суммы собранных премий; этот процент равен 15% от разницы между упомянутым выше отношением и 60%. Суммарные потери имеют распределение Парето с параметрами $\theta = 500,000$, $\alpha = 2$. Общая сумма премий по проданным агентом полисам равна 800,000. Вычислите ожидаемый размер бонуса.

5. Число страховых случаев N по некоторому портфелю имеет распределение: $P(N = 0) = 0.7$, $P(N = 2) = 0.2$, $P(N = 3) = 0.1$. Выплаты по страховому случаю равны 0 или 10 с вероятностями 0.8 и 0.2 соответственно. Предполагая, что число страховых случаев и размеры выплат по ним независимы, вычислите вероятность того, что суммарные выплаты превысят среднее значение больше чем на 2 стандартных отклонения.

6. Вы моделируете доход/потери от страховых операций, предполагая, что:

- (i) Наступление страховых случаев описывается процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda = 2/3$ в год.
- (ii) Размер потерь по одному страховому случаю равен 1, 2 или 3 с вероятностями $p(1) = 0.25$, $p(2) = 0.25$, $p(3) = 0.50$.
- (iii) Процесс наступления страховых случаев и их тяжесть независимы.
- (iv) Годовая премия равна ожидаемым выплатам плюс 1.8 стандартного отклонения выплат от среднего.
- (v) Процентная ставка равна 0.

Для моделирования интервалов времени между страховыми случаями вы используете метод обращения и следующие значения равномерно распределённой величины на $(0;1)$: 0.25, 0.40, 0.60, 0.80. Для моделирования потерь по одному страховому случаю вы используете метод обращения и следующие значения равномерно распределённой величины на $(0;1)$: 0.30, 0.60, 0.20, 0.70. Вычислите доход или потери страховщика за двухлетний период по результатам этого моделирования.

Образцы билетов.

Билет 1.

1. Метод Бокса-Мюллера моделирования нормально распределённой величины.

2. Отрицательное биномиальное распределение как рандомизированное пуассоновское.

Задача к билету. Размер годового бонуса для страховой агента зависит от отношения суммарных потерь по полисам, проданным им за год, к общей сумме премий по этим полисам. Если это отношение больше или равно 60% бонус не платится. Если же оно меньше 60%, то размер

бонуса составляет определённый процент от общей суммы собранных премий; этот процент равен 15% от разницы между упомянутым выше отношением и 60%. Суммарные потери имеют распределение Парето с параметрами $\theta = 500,000$, $\alpha = 2$. Общая сумма премий по проданным агентом полисам равна 800,000. Вычислите ожидаемый размер бонуса.

Билет 2.

1. Рекурсия Панджера.

2. Принципы актуарного моделирования. Почему и как используются модели. Преимущества и ограничения моделей.

Задача к билету. Потери распределены на отрезке $[0;120]$ в соответствии с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0.01, & 0 \leq x \leq 80, \\ -0.0025x + 0.03, & 80 \leq x \leq 120 \end{cases}.$$

Вычислите LER для простого вычета $d = 20$.

Билет 3.

1. Когерентные меры риска.

2. Объединение/расщепление портфеля в пуассоновской модели.

Задача к билету. 6. Вы моделируете доход/потери от страховых операций, предполагая, что:

- (i) Наступление страховых случаев описывается процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda = 2/3$ в год.
- (ii) Размер потерь по одному страховому случаю равен 1, 2 или 3 с вероятностями $p(1) = 0.25$, $p(2) = 0.25$, $p(3) = 0.50$.
- (iii) Процесс наступления страховых случаев и их тяжесть независимы.
- (iv) Годовая премия равна ожидаемым выплатам плюс 1.8 стандартного отклонения выплат от среднего.
- (v) Процентная ставка равна 0.

Для моделирования интервалов времени между страховыми случаями вы используете метод обращения и следующие значения равномерно распределённой величины на $(0;1)$: 0.25, 0.40, 0.60, 0.80. Для моделирования потерь по одному страховому случаю вы используете метод обращения и следующие значения равномерно распределённой величины на $(0;1)$: 0.30, 0.60, 0.20, 0.70. Вычислите доход или потери страховщика за двухлетний период по результатам этого моделирования.

6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Литература основная

Kuen Tse. *Nonlife Actuarial Models. Theory, Methods and Evaluation*. Cambridge University Press, 2009.
Exam C «Construction and Evaluation of Actuarial Models». Sample Questions. The Society of Actuaries, 2016.

Литература дополнительная

Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot, G.E. *Loss Models: From Data to Decisions* (Fourth Edition), John Wiley & Sons, 2012. ISBN: 978-1-118-31532-3.
Е.В.Булинская. Теория риска и перестрахование. Часть 2. Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2006.
Г.И.Фалин. Математический анализ рисков в страховании. Российский юридический издательский дом, Москва, 1994. ISBN 5-88635-003-0
Г.И.Фалин, А.И.Фалин. *Теория риска для актуариев в задачах*, 2-е издание: Мир, Москва, 2004. 240 с., ил. ISBN 5-03-003607-5
Encyclopedia of Actuarial Science. John Wiley & Sons, Ltd, 2004 (articles: Risk Measures; Premium Principles)
SoA Exam C «Construction and Evaluation of Actuarial Models», Syllabus for 2017 examinations.
Subject CT4 “Models”. Syllabus for the 2018 exams. The Faculty of Actuaries and Institute of Actuaries, 1 June 2017.
Subject CT4 “Models”. Core Reading. The Faculty of Actuaries and Institute of Actuaries, 2017.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

<http://www.actuaries.org.uk/> <https://www.soa.org/member/> <http://www.journals.elsevier.com/insurance-mathematics-and-economics/>
<http://journalofriskandinsurance.smeal.psu.edu/>

Приложение утверждено на заседании кафедры теории вероятностей

Протокол № 6 от 18 января 2015 г.