

ИТОГОВЫЙ ОТЧЕТ (2012-2014) ПО ПРОЕКТУ РФФИ 12-08-00591-а

Системы с переключениями (динамические бильярды с переключениями) являются моделями для описания таких систем, где за небольшое время происходит заметное изменение не только скорости системы (бильярд), но и ее положения. Примеры таких систем были найдены совсем недавно. Тематика является новой и оригинальной. Классическая модель сухого трения (закон Кулона) достаточно адекватно описывает взаимодействие тела с опорной поверхностью при поступательном движении тела. При поступательно-вращательном движении тела более адекватными являются модели П. Контенсу, В.Ф. Журавлева, А.П.Иванова и их модификации, предложенные исполнителями проекта. В рамках этих моделей учитываются все виды трения (скольжения, верчения и качения).

В рамках проекта проведены дальнейшие обобщения указанных моделей, которые учитывают упругие свойства опорной плоскости и зависимость формы пятна контакта как от скорости скольжения и угловой скорости тела, так и от его ориентации. Последнее существенно при описании, например, динамики эллипсоида или эллиптического цилиндра по плоскости с трением, однако, насколько известно исполнителям проекта, ранее не учитывалось. Изучение движения тел по плоскости при наличии вязкого трения с переменным коэффициентом скольжения и динамического распределения нормального давления ранее не проводилось. Проведены исследования систем с многовариантной кинематикой, то есть механических систем, со связями, характер которых может зависеть от типа движения. Рассмотрены системы, в которых могут происходить удары с трением и системы с высокочастотными вибрациями, что, в частности, может приводить к переходу системы из голономной в неголономную и обратно. Изучение проводилось как в общетеоретическом плане методами теоретической механики, так и в прикладном. Речь идет о разработке моделей механических систем с многовариантной кинематикой, которые изучаются аналитически в сопоставлении с результатами моделирования. В частности, исследованы системы со скольжением, качением и верчением в рамках модифицированных моделей трения, а также системы, описываемые разными дифференциальными уравнениями в разных частях фазового пространства.

Получены следующие результаты:

- Для систем с дифференциальными условными и односторонними связями, в частности, для модели удара с трением рассмотрены предельные режимы движения при потерях энергии во время ударного взаимодействия. Разработана модель удара с трением. В задачах о движении твердых тел, соударяющихся с шероховатыми поверхностями, в рамках модели ударного взаимодействия, учитывающей трение, найдены периодические режимы движения.

- Для систем с быстро меняющимися параметрами получены предельные уравнения движения для механических систем общего вида, предложен метод получения предельных уравнений движения, получающихся при стремлении частоты колебаний к бесконечности. Рассмотрена механическая система с произвольным числом степеней свободы, подвергающаяся быстрой периодической вибрации с нулевым средним и движение которой может быть описано уравнениями 2-го порядка. Также получен явный вид предельных уравнений движения, записанных в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка.

- Проведены исследования динамики твердого тела по плоскости с учетом всех видов трения, возможности подскоков тела и ударов. Разработаны новые модели силового взаимодействия твердого тела с плоскостью при наличии трения скольжения, верчения и качения с учетом неравномерного распределения контактных напряжений в зоне контакта, смещения центра давления от центра пятна контакта, возможных отрывов тела от плоскости и т.д.

- В рамках динамически совместной взаимосвязанной модели трения исследована динамика кругового цилиндра на горизонтальной плоскости с трением скольжения и качения (цилиндр опирается о плоскость образующей, исследована динамика кругового цилиндра на наклонной плоскости с трением скольжения и верчения (цилиндр опирается о плоскость круговым сечением). Рассмотрена задача о движении шайбы по плоскости при наличии вязкого трения с переменным коэффициентом скольжения и динамического распределения нормального давления.

- Исследована динамика шара на плоскости с трением скольжения, верчения и качения в рамках динамически совместной взаимосвязанной модели трения, как для безотрывных движений шара, так и с учетом его возможных подскоков над плоскостью. В динамике двусферического волчка тип-топ рассмотрены псевдостационарные движения, обнаруженные при численном исследовании различных моделей трения, исследована устойчивость этих движений в зависимости от вязко-упругих свойств реакции опорной плоскости.

- Исследована задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух одинаковых эллиптических пластинок, соединенных перпендикулярно друг другу вдоль большей или меньшей полуоси. Данное тело при движении по горизонтальной плоскости в каждый момент времени касается её двумя точками. В предположении, что движение тела происходит без проскальзывания, построены траектории точек касания на плоскости. Найдены также положения равновесия тела на плоскости и исследована их устойчивость.

- Исследованы задачи о движении по неподвижной выпуклой поверхности абсолютно твёрдого стержня без проскальзывания и саней Чаплыгина.

- Построена модель силового взаимодействия абсолютно твердого тела с деформируемой плоскостью. Результаты исследования сравнены с различными экспериментальными данными. Определены границы применимости классических моделей трения. Получены условия существования и устойчивости прецессионных движений эллипсоида с усложненной моделью трения и исследованы нестационарные движения эллипсоида на неподвижной и вибрирующей плоскости.

- Рассмотрена задача нелинейных колебаний эллипсоида вращения на вибрирующей горизонтальной плоскости. Построены обобщенные диаграммы Смейла для однородного эллипсоида вращения, близкого к шару, на горизонтальной плоскости. Рассмотрена задача о нелинейных колебаниях абсолютно твердого параллелепипеда на вибрирующей горизонтальной плоскости и изучен вопрос о возможности уменьшения амплитуды колебаний с помощью динамического гасителя в виде маятника. Проведено исследование возможных режимов вынужденных колебаний однородного параллелепипеда на вибрирующей горизонтальной плоскости в предположениях о возможности отрыва от плоскости опорных ребер параллелепипеда и проскальзывания вдоль неё. Для случая гармонических колебаний плоскости получены возможные режимы вынужденных колебаний параллелепипеда и исследован вопрос об уменьшении амплитуды колебаний с помощью математического маятника.

- Изучена задача о динамике эллипсоида вращения на горизонтальной плоскости с трением. Без конкретизации модели, а только лишь в предположении о некоторых естественных свойствах трения, исследованы стационарные движения эллипсоида. В рамках общей теории инвариантных множеств механических систем с симметрией дан качественный анализ динамики эллипсоида. Результаты представлены в виде обобщенных диаграмм Смейла. В модели эллиптического пятна контакта и локального закона вязкого трения построена взаимосвязанная модель трения выпуклого твердого тела с горизонтальной опорной плоскостью. Полученная модель применена к исследованию динамики однородного эллипсоида вращения на горизонтальной плоскости. Изучены псевдостационарные движения эллипсоида и исследована их устойчивость.

- Рассмотрено движение тяжелой точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг наклонной оси, фиксированной в абсолютном пространстве, при наличии вязкого трения. Изучено существование, ветвление и устойчивость равновесий точки. Рассматриваемая механическая система представляет собой пример простейшего описания устройств, работа которых предусматривает тот или иной вид перемешивания. Изучены относительные равновесия и периодические режимы движения тяжелой материальной точки на некоторых вращающихся поверхностях при наличии вязкого или сухого трения. Построены бифуркационные диаграммы.

- Изучена плоская задача о движении плоского дискретного твердого тела и материальной точки под действием сил взаимного притяжения. Для треугольника, в вершинах которого сосредоточены массы, найдены стационарные конфигурации и исследованы достаточные условия их устойчивости.

- При помощи алгоритма Ковачича доказана неинтегрируемость в лиувиллевых функциях задачи о качении динамически симметричного диска и тора по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. С помощью того же алгоритма установлена интегрируемость в лиувиллевых функциях задачи о качении динамически симметричного параболоида по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Задача сведена к квадратурам, проведён их детальный анализ.

Аннотации основных публикаций

Шалимова Е. С. О движении тяжелой точки по сферической поверхности при наличии вязкого или сухого трения. Труды ВСПУ-2014, 1911-1921.

Рассматривается задача о движении тяжелой точки по сфере, равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси, образующей постоянный угол с горизонтом, при наличии вязкого или сухого трения. Для случая вязкого трения исследуются существование, ветвление и устойчивость равновесий такой системы. Изучается вопрос о существовании периодических движений, предлагается подход к их отысканию в случае малой вязкости. Для случая сухого трения найдены абсолютные положения равновесия и исследована картина их изменения в зависимости от параметров системы

Буров А.А., Никонов В.И. Существование и устойчивость стационарных конфигураций в задаче о движении проволочного треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения. Труды 12 Всероссийского совещания по проблемам управления // Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014, 1851-1862.

Изучается плоская задача о движении треугольника, масса которого распределена на его сторонах и материальной точки под действием сил взаимного притяжения. Находятся стационарные конфигурации и исследуются достаточные условия их устойчивости. Обсуждается вопрос о применимости барицентрических координат при решении такого рода задач.

Никонов В. И. Относительные равновесия в задаче о движении треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения. Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика, 2014, 69, 2, 45-51.

Nikonov V. I. Relative equilibria in the motion of a triangle and a point under mutual attraction. Moscow University Mechanics Bulletin – Springer, 2014, 69, 2, 44-50

Изучается плоская задача о движении треугольника, в вершинах которого сосредоточены массы, и материальной точки под действием сил взаимного притяжения. Находятся стационарные конфигурации и исследуются достаточные условия их устойчивости. Обсуждается вопрос о применимости барицентрических координат при решении такого рода задач.

A. S. Kuleshov, G. A. Chernyakov Investigation of the Problem of Motion of a Heavy Dynamically Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane by the Kovacic Algorithm. Proceedings of the 8-th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC - 2014, July 6-11, 2014, Vienna, Austria, 453-458.

Рассматривается задача о движении динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. С помощью алгоритма Ковачича указываются некоторые новые случаи, когда удаётся выразить решение данной задачи с помощью квадратур.

A. S. Kuleshov, G. A. Chernyakov Motion of a Rotationally Symmetric Paraboloid on a Perfectly Rough Plane. Proceedings of the XLII Summer School - Conference "Advanced problems in mechanics" (APM 2014). St. Petersburg, June 30 - July 5, 2014. 177-183.

Рассматривается задача о качении динамически симметричного параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Уравнения движения задачи сведены к квадратурам, дано качественное описание движения параболоида по плоскости. Описаны все стационарные движения параболоида (перманентные вращения и регулярные прецессии) и доказано, что все они являются устойчивыми.

Кугушев Е.И. Никонов В.И. Оценка числа относительных равновесий гравитирующих точечного твердого тела и материальной точки. Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2015 (в печати)

Рассматривается плоская задача о движении твердого тела с дискретным распределением масс и материальной точки под действием взаимного притяжения. Изучаются стационарные конфигурации такой системы в случае, когда масса точки пренебрежимо мала и тело вращается вокруг своего центра масс с ненулевой угловой скоростью, а также в общем случае взаимного влияния тела и точки. Показывается, что в такой системе всегда есть не менее двух различных положений относительного равновесия.

Карапетян А.В., Муницына М.А. Динамика параллелепипеда на горизонтальной вибрирующей плоскости. Автоматика и телемеханика. 2015 (в печати)

Рассматривается динамика жесткого параллелепипеда на горизонтально вибрирующей жесткой опорной плоскости и возможность управления его колебаниями. Предполагается, что скольжение основания параллелепипеда вдоль плоскости отсутствует. Находятся такие параметры возбуждения, при которых параллелепипед отрывается от плоскости и совершает колебания, попеременно опираясь на опорные ребра. В случае гармонических колебаний плоскости находятся возможные режимы вынужденных колебаний. Исследуется вопрос об уменьшении амплитуды колебаний параллелепипеда с помощью математического маятника. Результаты представлены в виде амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик.

Карапетян А.В., Муницына М.А. Динамика параллелепипеда на горизонтальной вибрирующей плоскости. Автоматика и телемеханика, 2015 (в печати).

Рассматривается динамика жесткого параллелепипеда на горизонтально вибрирующей жесткой опорной плоскости и возможность управления его колебаниями. Предполагается, что скольжение основания параллелепипеда вдоль плоскости отсутствует. Находятся такие параметры возбуждения, при которых параллелепипед отрывается от плоскости и совершает колебания, попеременно опираясь на опорные ребра. В случае гармонических колебаний плоскости находятся возможные режимы вынужденных колебаний. Исследуется вопрос об уменьшении амплитуды колебаний параллелепипеда с помощью математического маятника. Результаты представлены в виде амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик.

Маркеева А.А., Левин М.А. Предельные уравнения движения механических систем при наличии высокочастотных вибраций. Вестник МГУ, 2015 (в печати)

Работа посвящена изучению механических систем с наличием быстро колеблющихся элементов.

Предложен метод получения предельных уравнений таких систем, получающихся при стремлении частоты колебаний к бесконечности. Рассмотрена механическая система с произвольным числом степеней свободы, подвергающаяся быстрой периодической вибрации с нулевым средним и движение которой может быть описано уравнениями 2-го порядка. Также получен явный вид предельных уравнений движения, записанных в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Буров А.А., Е.С.Шалимова Бифуркация относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающейся параболоидальной чаше с сухим трением. Механика твердого тела, 2015 (в печати)

Рассматривается движение тяжелой бусинки по поверхности параболоидальной чаши, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси, совпадающей с вертикалью. Предполагается, что между бусинкой и чашей действует сила сухого трения. Находятся множества неизолированных положений относительного равновесия бусинки на чаше, исследуется их зависимость от параметров задачи. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм.

Шалимова Е.С. Стационарные и периодические режимы в задаче о движении тяжелой точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения. Вестник МГУ, 2015 (в печати)

Найдены равновесные состояния тяжелой материальной точки на сфере, вращающейся с постоянной угловой скоростью. Исследована их устойчивость. Построены бифуркационные диаграммы.

Никонов В.И. Существование и устойчивость стационарных конфигураций в задаче о движении проволочного треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения. Прикладная математика и механика, 2015 (в печати).

Изучается плоская задача о движении массивного треугольника и материальной точки под действием сил взаимного притяжения. Находятся стационарные конфигурации такой системы, исследуются условия их устойчивости и бифуркаций.

Кулешов А.С., Рыбин В.В. Об управляемости системы А.Ю. Ишлинского. Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015 (в печати).

В 1965 году А.Ю. Ишлинский привёл пример неголономной механической системы малой размерности, которая не является системой Чаплыгина. Данная система состоит из трёх шероховатых цилиндров, два из которых катаются без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Третий цилиндр катается без проскальзывания по первым двум цилиндрам. В работе рассматриваются вопросы управляемости системы Ишлинского. При помощи теоремы Чжоу-Рашевского доказана управляемость данной системы.

Mikhail O. Itskovich., Alexander S. Kuleshov. Motion of a Rigid Body Consisting of Two Symmetric Laminae on a Horizontal Plane // Proceedings of the XLI Summer School - Conference "Advanced problems in mechanics" (APM 2013). St. Petersburg July 1 - 6, 2013. P. 298-303.

Исследована задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твёрдого тела, состоящего из двух соединённых между собой одинаковых симметричных пластинок. Пластины соединены перпендикулярно друг другу так, что их оси симметрии составляют единую ось, являющуюся осью симметрии полученного тела. Найдены все возможные положения равновесия тела на плоскости и получены условия их устойчивости.

Шалимова Е.С. О движении точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения. Вестник ННГУ № 1(3) 2013г, "Математическое моделирование. Оптимальное управление", 241-243

Рассматривается движение тяжелой точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг наклонной оси, фиксированной в абсолютном пространстве. Предполагается, что со стороны тела на точку действует сила вязкого трения. Изучаются существование, ветвление и устойчивость равновесий точки относительно абсолютного пространства. Рассматриваемая механическая система представляет собой пример простейшего описания устройств, работа которых предусматривает тот или иной вид перемешивания.

Кулешов А.С., Ифраимов С.В. О движении стержня по выпуклой поверхности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 2. С. 105-110.

В работе изучается движение абсолютно твёрдого стержня по неподвижной поверхности без проскальзывания. Получены общие уравнения движения стержня по поверхности вращения при наличии поля силы тяжести. Указано условие, при котором уравнения движения обладают инвариантной мерой; приведены примеры поверхностей, для которых данное условие выполнено. Описаны все возможные положения равновесия стержня на опорной поверхности

Ифраимов С.В., Кулешов А.С. О движении саней Чаплыгина по выпуклой поверхности // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8, 80-90.

Изучается задача о движении саней Чаплыгина по произвольной поверхности. Уравнения движения саней представлены в форме уравнений Аппеля. Рассмотрен случай движения саней по поверхности вращения и, в частности, по плоскости, сфере, цилиндру. Указаны несколько случаев, когда уравнения движения саней могут быть полностью проинтегрированы.

Кулешов А.С., Черняков Г.А. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2013. Вып. 4. С. 100-109.

Изучение уравнений движения многих механических систем сводится к исследованию свойств решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В 1986 году американский математик Дж.Ковачич предложил алгоритм, позволяющий найти решение линейного дифференциального уравнения второго порядка в случае, если это решение выражается через так называемые лиувиллевы функции. В случае отсутствия у линейного дифференциального уравнения лиувиллевых решений, алгоритм Ковачича также позволяет установить этот факт. В работе обсуждается применение алгоритма Ковачича к задаче о движении тяжелого твердого тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. В результате получены выводы о существовании решения данной задачи, выражающегося через лиувиллевы функции, в случае, когда катящееся тело представляет собой бесконечно тонкий диск, диск конечной толщины, параболоид вращения, а также веретенообразное тело.

Муницына М.А. Динамика тела вращения на горизонтальной плоскости в рамках взаимосвязанной модели трения // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 1 (3). С. 237-240.

Рассмотрена динамика выпуклого твердого тела на горизонтальной плоскости в рамках взаимосвязанной модели трения, основанной на локальном законе сухого трения и на предположении об эллиптической форме пятна контакта тела с опорной плоскостью. Предложенная модель трения учитывает как трение скольжения, так и трение верчения и может быть применена к исследованию динамики выпуклого твердого тела произвольной формы, что продемонстрировано на примере яйцеобразного тела вращения.

Кугушев Е.И., Попова Т.В. Экспериментальное определение коэффициента трения скольжения // Современные проблемы математики и механики. Том VII. Математика. Механика. Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ. - М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ. 2013. С. 64-69.

Предлагается методика лабораторной работы по определению коэффициента трения скольжения при поступательном движении шайбы по неподвижной горизонтальной плоскости с сухим трением. Начальную скорость шайба получает в результате удара по ней специальным телом, поэтому в работе определяется также коэффициент восстановления при неупругом ударе. Цель лабораторной работы - ознакомить студентов с практическим применением теоретических моделей контактного взаимодействия твердых тел.

Ифраимов С.В., Кулешов А.С. Об аналогии между задачей Сулова и задачей о движении саней Чаплыгина по сфере // Современные проблемы математики и механики. Том VII. Математика. Механика. Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ. - М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ. 2013. С. 53-60.

Об аналогии между двумя классическими задачами механики неголономных систем - задачей о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при наличии неголономной связи (задача Сулова) и задачей о движении саней Чаплыгина по сфере упоминается во многих работах. Но в большинстве работ не приводится строгого доказательства, почему уравнения движения в одной и в другой задаче имеют одинаковый вид. Данная методическая заметка имеет целью устранить этот пробел.

Зобова А.А. Различные модели трения в динамике двусферического волчка // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 2. С. 21-28.

Рассматривается динамика двусферического волчка тип-топ на шероховатой горизонтальной плоскости. Волчок ограничен невыпуклой поверхностью, которая состоит из двух сегментов сфер разного радиуса и цилиндра; ось цилиндра совпадает с общей осью симметрии сегментов. Если в начальный момент расположить волчок так, чтобы центр масс находился в почти наиниžшем положении, а ось симметрии была бы почти вертикальна, и придать волчку большую угловую скорость вращения вокруг вертикальной оси симметрии, то волчок перевернется с основания на ножку и начнет вращаться на ножке. После этого он начнет возвращаться обратно к устойчивому положению равновесия. Задача о движении волчка часто используется

для демонстрации работоспособности различных предлагаемых моделей трения. В данной работе проведено сравнение эффектов, возникающих в динамике двусферического волчка при применении моделей сухого трения. Используются как аналитические методы исследования, основанные на теории устойчивости и бифуркаций, так и численные расчеты. Численное исследование проводится в предположении, что опорная плоскость деформируема. Это позволяет описывать переходные процессы, которые сопровождаются ударами, с помощью одной системы уравнений

Зобова А.А., Трещев Д. В. Шар на вязкоупругой плоскости // Современные проблемы механики, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Андрея Геннадьевича Куликовского, Тр. МИАН, Т. 281, МАИК, М., 2013, С. 98-126.

Рассмотрена задача о движении абсолютно твердого однородного шара по горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Сила реакции плоскости рассчитывается следующим образом: в каждой инфинитезимальной области пятна контакта на шар действует вертикальная сила, описываемая вязко-упругой моделью Кельвина-Фойгта, и сила сухого трения Кулона, направленная противоположно скорости скольжения и прямо пропорциональная нормальной к поверхности контакта силе. Важной особенностью данной модели является зависимость распределения нормальных реакций в пятне контакта от кинематических характеристик движения шара - скорости центра масс и угловой скорости вращения. При достаточно общих предположениях о начальных условиях полностью аналитически решена поставленная задача: движение шара вплоть до полной остановки разбито на 4 качественно различных этапа, получены оценки длительности этих этапов, вычислены силы реакции и предложены адекватные и достаточно простые их аппроксимации, изучена зависимость от времени наблюдаемых координат системы (положение центра масс, <след> шара на опорной плоскости).

Русинова А.М. О динамике однородной шайбы на наклонной плоскости с трением // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 538-544.

Обсуждается задача о движении однородного кругового цилиндра по неподвижной наклонной шероховатой плоскости. Предполагается, что цилиндр опирается о плоскость своим основанием и совершает безотрывное движение. Силы и момент трения вычисляются в рамках динамически совместной модели, предложенной А.П. Ивановым, для которой распределение давления по пятну контакта неравномерно. Дан качественный анализ динамики цилиндра в случае, когда тангенс угла наклона плоскости меньше коэффициента трения Кулона. Рассматриваемая задача обобщает задачу о движении цилиндра по горизонтальной плоскости и задачу о движении диска (цилиндра нулевой высоты) по наклонной плоскости.

Болотин С.В., Попова Т.В. Об уравнениях движения системы внутри катящегося шара // Нелинейная динамика. 2013. т.9. №1. С. 51-58.

Bolotin S., Popova T.V. On the motion of a mechanical system inside a rolling ball // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. V. 18. №. 1. P. 159-165.

Рассматривается механическая система, стесненная идеальными связями и находящаяся внутри шара, катящегося без проскальзывания по плоскости. Показано, что если связи обладают сферической симметрией, то уравнения движения имеют лагранжеву форму. Без предположения симметрии это неверно.

G. A. Chernyakov, Alexander S. Kuleshov, Investigation of the problem of motion of a heavy dynamically symmetric body on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the XLI Summer School - Conference "Advanced problems in mechanics" (APM 2013). St. Petersburg July 1 - 6, 2013. P. 310-320.

Интегрирование уравнений движения многих механических систем сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В 1986 году американский математик Дж.Ковачич предложил алгоритм, позволяющий получить решение линейного дифференциального уравнения второго порядка в случае, если это решение выражается через так называемые лиувиллевы функции. В случае отсутствия у линейного дифференциального уравнения лиувиллевых решений, алгоритм Ковачича также позволяет установить этот факт. В работе обсуждается применение алгоритма Ковачича к задаче о движении тяжелого твердого тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. В результате получены выводы о существовании решения данной задачи, выражающегося через лиувиллевы функции, в случае, когда катящееся тело представляет собой бесконечно тонкий диск, диск конечной толщины, параболоид вращения, а также веретенообразное тело.

Гарциера Р., Карапетян А.В., Коллини К., Муницина М.А. Динамика параллелепипеда на горизонтальной вибрирующей плоскости // Современные проблемы математики и механики. Том VII. Математика. Механика. Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ. - М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ. 2013. С. 22-32.

Рассматривается динамика прямоугольного параллелепипеда на вибрирующей вдоль себя горизонтальной

плоскости. Актуальность задач такого рода вызвана необходимостью стабилизации различного рода зданий и сооружений при землетрясениях. Параллелепипед является простейшей моделью построенного без фундамента старинного здания, вследствие чего рассматривается возможность его отрыва от опорной плоскости. Кроме того предполагается, что скольжение основания параллелепипеда вдоль горизонтали отсутствует, а колебания поверхности происходят вдоль одного из рёбер параллелепипеда. Находятся такие параметры возбуждения, при которых параллелепипед отрывается от плоскости и совершает колебания, поочерёдно опираясь на ребра основания. В случае гармонических колебаний поверхности находятся возможные режимы вынужденных колебаний. Исследуется вопрос об уменьшении амплитуды колебаний параллелепипеда с помощью динамического гасителя колебаний, представляющего из себя математический маятник, подвешенный в центре верхнего основания тела. Результаты представлены в виде амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик.

Зобова А.А. Аппроксимация сил и моментов трения в модели вязко-упругой плоскости // Современные проблемы математики и механики. Том VII. Математика. Механика. Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ. - М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ. 2013. С. 44-52.

Рассматривается модель вязко-упругой плоскости, которая состоит в следующем: предполагается, что в каждой инфинитезимальной области контакта возникает вертикальная вязко-упругая плотность силы и плотность силы классического трения Кулона. Силы и моменты, действующие со стороны плоскости на шар, вычисляются интегрированием плотностей по пятну контакта. За счет вязкой компоненты вертикальной силы размер и форма пятна контакта и распределение нормальных давлений зависят от скорости центра масс шара, что качественно отличает рассматриваемую модель от аналогичных моделей со статическими моделями распределения давлений в пятне контакта. Подробное обсуждение этой модели и аналитическое решение задачи о прямом ударе и качении шара по плоскости с начальными условиями общего вида опубликовано в работе А.А.Зобовой, Д.В.Трещева. Там же были предложены аппроксимации сил и моментов трения на различных этапах движения шара. Целью данной статьи является проведение численных расчетов движения шара в полной постановке (т.е. путем численного суммирования возникающих плотностей сил в пятне контакта) и с полученными аппроксимациями, а также сравнение фазовых траекторий.

Кугушев Е.И., Никонов В.И. Относительные равновесия плоского твердого тела и точки под действием гравитационного притяжения // Современные проблемы математики и механики. Том VII. Математика. Механика. Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ. - М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ. 2013. С. 61-63.

Изучается плоская задача о движении твердого тела с дискретным распределением масс и материальной точки под действием взаимного притяжения. Находятся стационарные конфигурации такой системы в случае, когда масса точки пренебрежимо мала и тело вращается вокруг своего центра масс с ненулевой угловой скоростью. Показывается, что в такой системе всегда есть не менее двух различных положений относительного равновесия.

Шалимова Е.С., Буров А.А. О движении материальной точки по вращающейся сфере при наличии трения. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2013.

Рассматривается задача о движении тяжелой точки по сфере, равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси при наличии вязкого трения. Исследуются существование, устойчивость равновесий такой системы и их изменение в зависимости от параметров системы. Изучается вопрос о существовании периодических движений, порожденных периодическими и двояко-асимптотическими решениями невозмущенной системы, предлагается подход к их отысканию в случае малой вязкости.

Ifrimov S. V., Kuleshov A. S. Motion of a Rigid Rod on a Convex Surface // XLI Summer School - Conference "Advanced problems in mechanics" (APM 2013). St. Petersburg July 1 - 6, 2013. Book of abstracts. Polytechnical University Publishing House. P. 66.

Исследуется задача о движении абсолютно твёрдого тонкого стержня по неподвижной поверхности без проскальзывания. Методом Аппеля получены уравнения движения стержня по поверхности вращения при наличии поля силы тяжести. Указано условие, при котором уравнения движения обладают инвариантной мерой; приведены примеры поверхностей, для которых данное условие выполнено. Описаны все возможные положения равновесия стержня на опорной поверхности.

Левин М.А., Кугушев Е.И. Об уравнениях движения механических систем с быстро колеблющимися элементами. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2013.

Получены уравнения Лагранжа второго рода механических систем с вибрирующими элементами. Найдены предельные уравнения движения, получающиеся при стремлении частоты этих вибраций к бесконечности.

Доказана сходимость решений исходных уравнений к решениям предельных уравнений, равномерная по обобщенным координатам и слабая (в пространстве L_2) по обобщенным скоростям. Выявлены некоторые общие свойства полученных уравнений и соответствующих им механических систем, в частности, свойства положений равновесия. Рассмотрено несколько примеров.

Глаголев И.Е., Кугушев Е.И. Равновесные формы упругой нити при наличии внешних сил. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2013.

Рассматривается задача о равновесных положениях упругой нити на плоскости. На нить действуют внешние силы гидростатического давления, другими словами, к каждому элементарному участку приложена постоянная по модулю сила, направленная по нормали к этому участку. Нить считается нерастяжимой и обладающей плотностью упругой энергии, квадратично зависящей от кривизны. Показано, что равновесные формы нити можно интерпретировать как траектории движения специальной системы с гироскопическими силами в подходящей системе координат. Проводится исследование этой системы, строится бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс, на основе которого делается вывод об устойчивости вырожденных траекторий.

Отрадна Л.С. Движение механических систем при односторонних связях с трением. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 "Теоретическая механика". Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012, с. 122.

Диссертация посвящена задачам о движении твердых тел, соударяющихся с шероховатыми поверхностями, в рамках модели ударного взаимодействия, учитывающей трение. Рассматривается несколько задач о движении однородного шара: между двумя параллельными плоскостями, внутри сферы и внутри кругового цилиндра, а также плоского диска, движущегося по инерции в прямолинейном канале. Изучаются периодические режимы движения и условия выхода системы на эти режимы. Считается, что при ударе шероховатых поверхностей происходит мгновенное наложение и снятие связи, состоящей в том, что касательная составляющая скорости контактирующей точки тела равна нулю, то есть выполняется условие качения без проскальзывания.

Отрадна Л.С. Максимальность действия по Гамильтону для систем с односторонними связями // Вестник Московского университета, сер.1 мат.,мех., 2012, N4, 70-72с.

Показывается, что для систем с односторонними связями при ударе остается справедливым утверждение о вариационном принципе для определенного класса вариаций траектории, причем действия по Гамильтону максимально.

Отрадна Л.С., Барбашова Т.Ф. О движении шара с ударами о шероховатую поверхность // Вестник Московского университета, сер.1 мат.,мех. 2012, N5, 35-39с.

Рассматривается несколько задач о движении шара по инерции: между двумя параллельными плоскостями, внутри сферы и внутри кругового цилиндра. Считается, что при ударе происходит мгновенное наложение и снятие связи, состоящее в том, что касательная составляющая скорости контактирующей точки шара равна нулю, т.е. выполняется условие качения без проскальзывания. Показывается, что во всех случаях движение в пределе выходит на установившийся режим по скорости: угловая скорость шара стремится к постоянному значению, а скорость его центра становится периодической, для плоскостей, и условно периодической, для сферы и цилиндра. В некоторых случаях на установившийся режим выходят и координаты, определяющие положение и ориентацию шара.

Муницина М.А. Движения сфероидов на горизонтальной плоскости с вязким трением // Прикладная математика и механика. Т. 76. Вып. 2. 2012. С. 214-223.

Анализируются условия устойчивости установившихся движений тяжелого эллипсоида вращения на плоскости с вязким трением. Дается геометрическая интерпретация результатов. Проводится сравнение результатов с соответствующими результатами в задачах движения эллипсоида на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой поверхностях.

Муницина М.А. Модель трения в случае плоского эллиптического контакта тела с опорной плоскостью // Нелинейная динамика. Т. 8. № 4. 2012. С. 705-712.

Модель трения Контенсу-Журавлева распространяется на случай плоского эллиптического контакта выпуклого тела с горизонтальной плоскостью. Результирующая сила и момент трения предложенной модели зависят не только от скорости скольжения и вращения тела, но и от геометрических параметров пятна контакта и его ориентации на плоскости, которые в свою очередь зависят от ориентации движущегося тела в пространстве. Предложенная модель трения иллюстрируется на примере численного исследования задачи о движении однородного эллипсоида вращения, вытянутого вдоль оси динамической симметрии, по

горизонтальной упругой плоскости.

Ицкович М.О., Кулешов А.С. Motion of the rigid body consisting of two disks. Proceedings of the XL Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics" (APM-2012), p. 163-169.

Для тела, состоящего из двух дисков получены параметрические уравнения траекторий точек касания с горизонтальной плоскостью. Найдены положения равновесия тела на плоскости и получены условия их устойчивости.

Ифраимов С.В., Кулешов А.С. Нелинейные колебания консервативных негोलомных систем около многообразия равновесий // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 24-29 сентября 2012 года). Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С. Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом». 2012. С. 439-442.

В работе обсуждается возможность применения метода А.М. Ляпунова для нахождения периодических движений консервативных негोलомных систем. В конкретной негोलомной задаче о движении тонкого стержня по наклонному цилиндру методом А.М. Ляпунова найдено периодическое решение уравнений возмущенного движения в окрестности многообразия равновесий.

Шалимова Е.С. О движении точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 24-29 сентября 2012 года). Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С. Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом». 2012. С.993-996.

Рассматривается задача о движении тяжелой точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг наклонной оси, фиксированной в неподвижном пространстве, в предположении о наличии вязкого трения. Исследуются существование, ветвление и устойчивость положений равновесия. Получено, что всегда существуют два положения равновесия в абсолютном пространстве (в критическом случае они совпадают). Для случая горизонтальной оси вращения исследована картина изменения положений равновесия в зависимости от параметров. Показано, что при некоторых значениях параметров оба положения равновесия неустойчивы, что позволяет предположить в этом случае существование периодического режима.

Карапетян А.В. Обобщенные диаграммы Смейла и их применение к задачам динамики систем с трением // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т.1. Секция 1. Аналитическая механика. Казань, 12 - 16 июня 2012 г. - Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 247-258.

Приведена модификация метода диаграмм Смейла, разработанного для качественного анализа консервативных механических систем с симметрией, на случай диссипативных механических систем с симметрией. Рассмотрен случай, когда диссипация зависит от малого параметра, причем при нулевом значении этого параметра является частичной, а при ненулевом - полной. Сначала рассматривается порождающая система, соответствующая случаю нулевого параметра, и дается качественный анализ ее динамики на основе метода обобщенных диаграмм Смейла, предложенного автором. Затем на основе анализа динамики порождающей системы дается качественный анализ динамики исходной системы с полной диссипацией. Общие результаты иллюстрируются на примере анализа динамики волчка тип-топ на плоскости с трением в случаях, когда учитывается только трение скольжения (частичная диссипация) и когда учитываются все виды трения - скольжения, верчения и качения (полная диссипация).

Ицкович М.О., Кулешов А.С. О движении тела, составленного из двух дисков, по горизонтальной плоскости // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т.1. Секция 1. Аналитическая механика. Казань, 12 - 16 июня 2012 г. - Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 230-239.

Получены параметрические уравнения траекторий точек касания тела, состоящего из двух дисков, с горизонтальной плоскостью. Найдены все положения тела на плоскости и получены условия их устойчивости.

Муницина М.А. Обобщенная модель сухого трения в случае плоского эллиптического пятна контакта // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т.1. Секция 1. Аналитическая механика. Казань, 12 - 16 июня 2012 г. - Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 366-371.

Построена согласованная модель трения, включающая трение скольжения и трения верчения, в случае плоского эллиптического пятна контакта твердого тела с горизонтальной поверхностью. В ней представлены точные выражения и их аппроксимации для компонент силы и момента трения. Показано, что в общем случае (полуоси пятна контакта различны) существует компонента силы трения, перпендикулярная скорости проскальзывания. При этом компоненты силы и момента трения предложенной модели зависят не только от

скорости скольжения и верчения тела, но и от геометрических параметров пятна контакта и его ориентации на плоскости, которые в свою очередь зависят от ориентации движущегося тела в пространстве.

Sentemova Olga. Dynamics of Sphere on a Horizontal Plane with Friction // 8th European Solid Mechanics Conference, ISBN 978-3-85125-223-1, pages 1-2 (2012)

Проведено обобщение модели Контенсу-Журавлева на случай эллиптического пятна контакта выпуклого тела с горизонтальной плоскостью.

Карапетян А.В. О методах теории устойчивости в задачах динамики твердого тела при наличии сухого трения // Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012): межд. конф.; Севастополь, 10-14 сентября 2012 г./ отв. ред. О.В. Анашкин; Таврический нац. ун-т имени В.И. Вернадского. - Симферополь: ДИАЙПИ, 2012. С. 127-128.

В работе рассматривается задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух одинаковых эллиптических пластинок, соединенных перпендикулярно друг другу вдоль большей полуоси. Данное тело при движении по горизонтальной плоскости в каждый момент времени касается ее двумя точками. В предположении, что движение тела происходит без проскальзывания, построены траектории точек касания на плоскости. Найдены также положения равновесия тела на плоскости и исследована их устойчивость.

Сентемова О.С. Динамика шара на горизонтальной плоскости с трением // Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012): межд. конф.; Севастополь, 10-14 сентября 2012 г./ отв. ред. О.В. Анашкин; Таврический нац. ун-т имени В.И. Вернадского. - Симферополь: ДИАЙПИ, 2012. С. 147.

Рассматривается движение шара на плоскости с трением. Доказаны основные свойства модели трения, предполагающей пятно контакта сферическим сегментом и учитывающей асимметрию распределения нормальных давлений. Получены интегральные выражения для сил и моментов трения. Так же проведен глобальный качественный и численный анализ движения шара на горизонтальной плоскости с трением в описанной модели трения. Показано, что шар остановится за конечное время, причем скольжение и угловая скорость шара обратятся в ноль одновременно. Результаты численного анализа представлены в виде графиков, иллюстрирующих зависимость фазовых переменных от времени.

Барбашова Т.Ф., Отраднова Л.С., Кугушев Е.И. О движении сферы с множественными соударениями // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XII Международной конференции. Москва, ИПУ РАН, 5 июня - 8 июня 2012 г. М.: Изд-во ИПУ РАН, 2012. С. 41-42.

В задаче о движении шара по инерции внутри сферы и внутри кругового цилиндра считается, что при ударе происходит мгновенное наложение и снятие связи, состоящее в том, что касательная составляющая скорости контактирующей точки шара равна нулю, т.е. выполняется условие качения без проскальзывания. Показывается, что во всех случаях движение в пределе выходит на установившийся режим.

Кугушев Е.И., Отраднова Л.С. О движении механической системы с соударениями // Шестые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 31 января - 3 февраля 2012 г. - М.: Издатель И.В. Балабанов, 2012. С.50.

Рассматривается модель удара с трением, состоящая в том, что при ударе тела о шероховатую поверхность происходит мгновенное наложение и снятие связи качения без проскальзывания, состоящей в том, что равна нулю касательная составляющая к поверхности скорость контактирующей точки тела. Для удара тела о шероховатую поверхность выводятся уравнения удара.

Кугушев Е.И., Малыгина Е.Ю. Математические модели таксиса. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2012.

Предлагается модель, объясняющая возникновение направленных двигательных реакций у свободно передвигающихся простейших и микроорганизмов. Такие реакции носят название таксис. Известно, что если поместить группу простейших организмов в среду с неравномерно распределенным раздражителем, то они в итоге окажутся в области, где это раздражение минимально или максимально. Так как микроорганизмы не имеют памяти и размеры их очень малы, то они не могут определить направление градиента функции раздражителя. Доказываются утверждения, подтверждающие, что такие модели описывают процесс таксиса. А именно, если в какой-то начальный момент времени точка находится в некоторой достаточно небольшой окрестности точки минимума функции, представляющей раздражитель, то описанные выше движения будут обеспечивать смещение точки в сторону этого минимума.

Кугушев Е.И., Маркеева А.А. Движение механических систем при наличии высокочастотных вибраций. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2012.

Предложен новый метод получения предельных уравнений для механических систем, подвергающихся быстрой вибрации, при частоте, стремящейся к бесконечности. Рассмотрены системы двух видов: механическая система с n степенями свободы, подвергающаяся быстрой периодической вибрации с нулевым средним, движение которой может быть описано уравнениями 2-го порядка и механическая система, описываемая уравнениями 1-го порядка, подвергающаяся такой же быстрой вибрации - произвольное твердое тело с неподвижной точкой. Доказывается теорема: при фиксированных начальных условиях на заданном конечном интервале времени, при стремлении частоты колебаний к бесконечности, решения уравнения сходятся к решениям некоторых предельных уравнений равномерно по положению и слабо в смысле L_2 по скорости. Эти предельные уравнения получены в явном виде. Рассмотрен ряд примеров применения этих уравнений для конкретных систем: маятник Уатта, математический маятник и физический маятник в быстро колеблющейся плоскости, волчок Лагранжа, точка подвеса которого совершает быстрые вертикальные вибрации. В некоторых случаях найдены положения равновесия и исследована их устойчивость.

Кугушев Е.И., Осаковская Е.Д., Попова Т.В. О движении цилиндра по горизонтальной плоскости в модели вязкого трения с переменным коэффициентом. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2012.

Рассматривается задача о движении однородного кругового цилиндра по горизонтальной плоскости с вязким трением. Коэффициент вязкого трения линейно зависит от нормального давления в точке контакта. Приводится феноменологическое обоснование такой модели трения. Распределение нормального давления определяется в рамках динамически совместной модели, предложенной А.П. Ивановым. Исследуются некоторые свойства движения.

Шалимова Е.С., Буров А.А. О движении точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2012.

Рассматривается задача о движении тяжелой точки по равномерно вращающейся сфере, ось вращения которой наклонена по отношению к горизонту. Выписываются уравнения движения в предположении, что точка и сфера взаимодействуют по закону вязкого трения. Найдены положения равновесия точки в абсолютном пространстве. Получено, что всегда есть два положения равновесия (в критическом случае они совпадают), одно из которых является асимптотически устойчивым, а другое неустойчивым. Для случая горизонтальной оси вращения исследована картина изменения положений равновесия в зависимости от угловой скорости. Показано, что если она превышает критическое значение, неустойчивы оба положения равновесия. Это позволяет предположить существование в этом случае периодического режима.