РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2005, том 400, № 1, с. 46–48

МЕХАНИКА

УДК 531.384

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2005 г. А. С. Кулешов

Представлена академиком В.В. Румянцевым 08.07.2004 г.

Поступило 08.07.2004 г.

Рассматривается задача о движении тяжелого твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Как известно, уравнения движения тела допускают, кроме интеграла энергии, два линейных по квазискоростям первых интеграла. Однако в явном виде эти интегралы указаны лишь в нескольких частных случаях [1–3]. В настоящем сообщении приведен явный вид этих интегралов в случае, когда движущиеся тело является параболоидом вращения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть твердое тело, симметричное по форме и распределению масс относительно оси $G\zeta$, проходящей через центр тяжести G тела, опирается в точке M на неподвижную горизонтальную плоскость Oxy. Обозначим: θ – угол между осью симметрии тела и вертикалью, β – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, α – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox. Положение тела определяется углами α, β, θ и координатами x и y точки M.

Кроме того, введем систему координат $G\xi\eta\zeta$, движущуюся и в пространстве, и в теле так, что ось $G\xi$ во время лежит в плоскости вертикального меридиана, а $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости (рис. 1). Пусть векторы скорости $\mathbf{v}$ центра масс G, угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела, угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ трехгранника $G\xi\eta\zeta$ и реакции плоскости $\mathbf{R}$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами v_ξ, v_η, v_ζ; p, q, r; Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ и R_ξ, R_η, R_ζ соответственно. Пусть m – масса тела, A_1 – момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Заметим [1–3], что расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ, т.е. $GQ = f(\theta)$. Координаты ξ, η, ζ точки M касания тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ, причем $\eta = 0$, а

$$\begin{aligned} \xi &= -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta, \\ \zeta &= -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то $\Omega_\xi = p$, $\Omega_\eta = q$. Плоскость $G\xi\zeta$ будет все время вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta - \Omega_\xi \operatorname{ctg}\theta = 0$. Скорость точки касания M равна нулю, следовательно,

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0.$$

Закон изменения импульса в проекции на ось $G\eta$ и закон изменения кинетического момента для осей $G\xi$ и $G\zeta$ после простых преобразований дают:

$$\frac{d(p\zeta - r\xi)}{dt} - pq(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi) = \frac{R_\eta}{m},$$

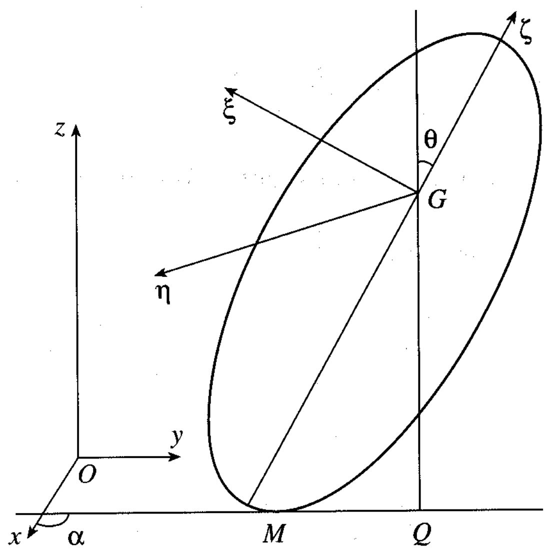

Рис. 1.

$$A_1\frac{dp}{dt} + (A_3 r - A_1 p\operatorname{ctg}\theta)q = -\zeta R_\eta, \qquad (2)$$

$$A_3\frac{dr}{dt} = \xi R_\eta.$$

Отбрасывая в дальнейшем частный случай $\theta =$ $= \text{const}$ и имея в виду, что $q = -\frac{d\theta}{dt}$, по исключении R_η из системы (2) получим

$$A_1\frac{dp}{d\theta} + A_3\frac{\zeta}{\xi}\frac{dr}{d\theta} = -A_1 p\operatorname{ctg}\theta + A_3 r,$$

$$\zeta\frac{dp}{d\theta} - \frac{(A_3 + m\xi^2)}{m\xi}\frac{dr}{d\theta} = -(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi + \zeta')p + \xi' r. \qquad (3)$$

Таким образом, из системы (3) определяются два линейных относительно p и r первый интеграла. К настоящему времени явный вид этих интегралов известен лишь в случае, когда движущееся тело является неоднородным динамически симметричным шаром. В случае движения по плоскости круглого диска решение системы (3) дает выражения для p и r через гипергеометрические функции. Укажем здесь явный вид линейных по p и r первых интегралов в случае движения по плоскости параболоида вращения.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В СЛУЧАЕ ПАРАБОЛОИДА

Перейдем в системе уравнений (3) от переменных p и r к новым переменным K_γ^Δ и K_z^Δ, связанным с переменными p и r соотношениями

$$K_\gamma^\Delta = (A_1 p\sin\theta + A_3 r\cos\theta)\sqrt{A_1A_3 + A_1 m\xi^2 + A_3 m\zeta^2},$$

$$K_z^\Delta = A_3 r\sqrt{A_1A_3 + A_1 m\xi^2 + A_3 m\zeta^2}.$$

Система (3), записанная при помощи переменных K_γ^Δ и K_z^Δ, имеет следующий вид:

$$\frac{dK_\gamma^\Delta}{d\theta} = \frac{m(A_3(\xi + \zeta')\cos\theta - (A_3\zeta - A_1\xi')\sin\theta)}{(A_1A_3 + A_1 m\xi^2 + A_3 m\zeta^2)\sin\theta}\times$$
$$\times[\xi K_\gamma^\Delta + (\zeta\sin\theta - \xi\cos\theta)K_z^\Delta],$$

$$\frac{dK_z^\Delta}{d\theta} = \frac{mA_3(\xi + \zeta')}{(A_1A_3 + A_1 m\xi^2 + A_3 m\zeta^2)\sin\theta}\times \qquad (4)$$
$$\times[\xi K_\gamma^\Delta + (\zeta\sin\theta - \xi\cos\theta)K_z^\Delta].$$

Предположим, что тело вращения, движущееся без скольжения по горизонтальной плоскости, представляет собой параболоид. Тогда

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos\theta}, \quad \xi = -\frac{2\lambda\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \lambda,$$

$$\xi^2 = 4\lambda(\zeta + \lambda).$$

Из системы (4) с учетом выражений для ξ и ζ мы можем получить следующее уравнение второго порядка для K_γ^Δ:

$$\frac{d^2K_\gamma^\Delta}{d\theta^2} - \frac{2m\lambda^2\sin\theta(2(A_3 - A_1)\cos^2\theta - A_3)}{\Phi(\theta)\cos\theta}\frac{dK_\gamma^\Delta}{d\theta} -$$
$$-\frac{1 + 3\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\frac{dK_\gamma^\Delta}{d\theta} + \frac{2m\lambda^2(2A_1 - A_3)\sin^2\theta}{\Phi(\theta)}K_\gamma^\Delta = 0. \qquad (5)$$

Здесь

$$\Phi(\theta) = (A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1))\cos^4\theta -$$
$$-4m\lambda^2(A_3 - A_1)\cos^2\theta + A_3 m\lambda^2.$$

Введем теперь вместо функции K_γ^Δ другую функцию $P(\theta)$, связанную с K_γ^Δ соотношением

$$K_\gamma^\Delta =$$
$$= \frac{\sqrt{(A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1))\cos^2\theta + 2m\lambda^2(2A_1 - A_3)}}{\cos\theta}P(\theta).$$

Для функции $P(\theta)$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка (5) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} - \frac{\dfrac{d^2S}{d\theta^2}}{\dfrac{dS}{d\theta}}\frac{dP}{d\theta} + \left(\frac{dS}{d\theta}\right)^2 P = 0, \qquad (6)$$

где $S = S(\theta)$ – функция, представимая в виде неопределенного интеграла

$$S(\theta) = -\int_0^\theta \frac{m\lambda^2\sqrt{2A_1A_3(2A_1 - A_3)(A_3 + 4m\lambda^2)}\sin\varphi\, d\varphi}{((A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1))\cos^2\varphi + 2m\lambda^2(2A_1 - A_3))\sqrt{\Phi(\varphi)}}.$$

Решая уравнение (6), находим

$$P(\theta) = C_1\cos S(\theta) + C_2\sin S(\theta),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Следовательно, для функции K_γ^Δ справедливо соотношение

$$K_\gamma^\Delta = \frac{\sqrt{(A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1))\cos^2\theta + 2m\lambda^2(2A_1 - A_3)}}{\cos\theta}(C_1\cos S(\theta) + C_2\sin S(\theta)). \quad (7)$$

Получив выражение для функции K_γ^Δ в зависимости от θ и произвольных постоянных, с помощью системы (4) можно получить выражение для функции

$$K_z^\Delta = \frac{2m\lambda^2A_3\cos 2\theta(\cos^2\theta)^{-1}}{\sqrt{(A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1))\cos^2\varphi + 2m\lambda^2(2A_1 - A_3)}}(C_1\cos S(\theta) + C_2\sin S(\theta)) +$$

$$+\frac{\sqrt{2A_1A_3(A_3 + 4m\lambda^2)(2A_1 - A_3)^{-1}\Phi(\theta)}}{\cos\theta\sqrt{(A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1))\cos^2\theta + 2m\lambda^2(2A_1 - A_3)}}(C_2\cos S(\theta) - C_1\sin S(\theta)). \quad (8)$$

Заметим, что при $A_3 = 2A_1$ из уравнения (5) следует, что $K_\gamma^\Delta = \text{const}$. Этот случай рассмотрен ранее в работе [2].

Таким образом, линейные по квазискоростям первые интегралы уравнений движения тяжелого параболоида вращения, катящегося по абсолютно шероховатой плоскости, могут быть получены из соотношений (7) и (8). При этом на моменты инерции A_1 и A_3 не накладывалось никаких дополнительных ограничений. Результаты работы согласуются с результатами, полученными в работе [2] для частного случая $A_3 = 2A_1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04–01–00398), гранта “Молодые кандидаты” (МК-1393.2003.01) и гранта “Ведущие научные школы России” (НШ-2000.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* // Тр. отд-ния физ. наук. О-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 3. С. 10–16.
2. *Муштари Х.М.* // Мат. сб. 1932. Т. 39. № 1/2 С. 105–126.
3. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.