

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций)

Volume 13, Issue 1

2017

EXECUTIVE EDITOR

Vladimir I. Travush, Professor,
Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir N. Sidorov, Professor
Department of Advanced Mathematics
and Structural Mechanics,
Moscow Institute of Architecture (State Academy);
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN);
11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow,
107031, Russia

EDITORIAL DIRECTOR

Valery I. Telichenko, Professor,
The First Vice-President of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Nadezhda S. Nikitina, Professor
Director of ASV Publishing House;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

TECHNICAL EDITOR

Taymuraz B. Kaytukov, Associate Professor
Research & Educational Center
of Computational Simulation, National Research
Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, 129337 Moscow, Russia

ASSOCIATE EDITORS

Pavel A. Akimov, Professor
Executive Scientific Secretary of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences;
Scientific Research Center "STADYO";
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia

Alexander M. Belostotsky, Professor
Scientific Research Center "STADYO";
National Research Moscow State University
of Civil Engineering;
8th Floor, 18, ul. Tretya Yamskogo Polya,
125040, Moscow, Russia

Vladimir Belsky, Ph.D.
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Mikhail Belyi, Professor
Dassault Systèmes Simulia;
1301 Atwood Ave Suite 101W
02919 Johnston, RI, United States

Vitaly Bulgakov, Professor
Parametric Technology Corp.;
57 Metropolitan Av.,
Ashland, MA, USA

Nikolai P. Osmolovskii, Professor
Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences;
Kazimierz Pulaski University
of Technology and Humanities in Radom;
29, ul. Malczewskiego, 26-600, Radom, Poland

Gregory P. Panasenکو, Professor
Equipe d'Analyse Numerique
NMR CNRS 5585
University Gean Mehnet;
23 rue. P.Michelon 42023, St.Etienne, France

Leonid A. Rozin, Professor
Department of Structural Mechanics,
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University;
29, Ul. Politechnicheskaya,
195251 Saint-Petersburg, Russia

ADVISORY EDITORIAL BOARD & REVIEWERS

Robert M. Aloyan, Professor
Ivanovo State Polytechnical
University; 20, Ulitsa 8 Marta,
Ivanovo, 153037, Russia

Vladimir I. Andreev, Professor
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Mukhtaritdin M. Batdalov, Professor
Makhachkala Branch of Moscow
Automobile and Road State
Technical University (MADI);
1. Imam Shamil Avenue,
Makhachkala, Russia

Klaus-Jurgen Bathe, Professor
Massachusetts Institute
of Technology;
Cambridge, MA 02139, USA

Alexander T. Bekker, Professor
Far Eastern Federal University;
8 Suhanova Street, Vladivostok,
690950, Russia

Jan Buynak, Professor
University of Žilina; 1, Univerzitná,
Žilina, 010 26, Slovakia

Evgeniy M. Chernishov, Professor
Voronezh State University of
Architecture and Civil Engineering;
84, 20 Let Oktyabrya st., Voronezh,
394006, Russia

Vladimir T. Erofeev, Professor
Ogarev Mordovia State University;
68 Bolshevistskaya Str., Saransk
430005, Republic of Mordovia,
Russia

Victor S. Fedorov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Sergiy Yu. Fialko, Professor,
Cracow University of Technology;
24, Warszawska Street, Kraków,
31-155, Poland

Alexander S. Gorodetsky, Professor
LIRA SAPR Ltd.;
Office 212, 7a Kiyanovsky side street
(pereulok), Kiev, 04053, Ukraine

Vyatcheslav A. Ilyichev, Professor
Russian Academy of Architecture
and Construction Sciences;
24, Ulitsa Bolshaya Dmitrovka,
Moscow, 107031, Russia

Marek Iwański, Professor,
Kielce University of Technology;
7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego
Kielce, 25 – 314, Poland

Sergey Yu. Kalashnikov, Professor
Volgograd State University of
Architecture and Civil Engineering;
1, Akademicheskaya Street,
Volgograd, 400074, Russia

Nikolay I. Karpenko, Professor
Research Institute of Building
Physics; 21, Locomotive Travel,
Moscow, 127238, Russia

Vladimir V. Karpov, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Galina G. Kashevarova, Professor
Perm National Research Polytechnic
University; 29 Komsomolsky pros.,
Perm, Perm Krai, 614990, Russia

Vitaly I. Kolchunov, Professor
Southwest State University; 94, 50 let
Oktyabrya, Kursk, 305040, Russia

Markus König, Professor
Ruhr-Universität Bochum;
150, Universitätsstraße, Bochum,
44801, Germany

Sergey B. Kositsin, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Amirlan A. Kusainov, Professor
Kazakh Leading Academy of
Architecture and Civil Engineering;
29, Toraiyrov str., Almaty, Almaty,
050043, Republic of Kazakhstan

Sergey V. Kuznetsov, Professor
Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences;
101-1, Prosp. Vernadskogo, Moscow,
119526, Russia

Vladimir V. Lalin, Professor
Peter the Great Saint-Petersburg
Polytechnic University; 29, Ul.
Politechnicheskaya, St. Petersburg,
195251, Russia

Leonid S. Lyakhovich, Professor
Tomsk State University
of Architecture and Building;
2, Solyanaya sq., Tomsk, 634003,
Russia

Rashid A. Mangushev, Professor
Saint Petersburg State University of
Architecture and Civil Engineering;
4, 2-nd Krasnoarmeiskaya Steet,
Saint Petersburg, 190005, Russia

Ilizar T. Mirsayapov, Professor
Kazan State University
of Architecture and Engineering;
1, Zelenaya Street, Kazan, 420043,
Republic of Tatarstan, Russia

Vladimir L. Mondrus, Professor
National Research Moscow State
University of Civil Engineering;
Yaroslavskoe shosse 26, Moscow,
129337, Russia

Anatoly V. Perelmuter, Professor
SCAD Soft;
Office 1,2, 3a Osvity street,
Kiev, 03037, Ukraine

Alexey N. Petrov, Professor
Petrozavodsk State University;
33, Lenina Prospect, Petrozavodsk,
185910, Republic of Karelia, Russia

Vladilen V. Petrov, Professor
Yuri Gagarin State Technical
University of Saratov;
77 Politechnicheskaya Street,
Saratov, 410054, Russia

Jerzy Z. Piotrowski, Professor
Kielce University of Technology;
al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7,
Kielce, 25 – 314, Poland

Chengzhi Qi, Professor
Beijing University of Civil
Engineering and Architecture;
1, Zhanlanlu, Xicheng District,
Beijing, China

Nikolaj N. Shaposhnikov, Professor
Moscow State University of Railway
Engineering; 9, Obraztsova Street,
Moscow, 127994, Russia

Eun Chul Shin, Professor
Incheon National University;
(Songdo-dong)119 Academy-ro,
Yeonsu-gu, Incheon, Korea

D.V. Singh, Professor
Vice-Chairman all India Council
for Technical Education;
New Delhi, India

Wacław Szczeciński, Professor
Lublin University of Technology;
Ul. Nadbystrzycka 40,
20-618 Lublin, Poland

Tadatsugu Tanaka, Professor
Tokyo University; 7-3-1 Hongo,
Bunkyo, Tokyo, 113-8654, Japan

Zbigniew Wojcicki, Professor
Wroclaw University of Technology;
11 Grunwaldzki Sq., 50-377,
Wroclaw, Poland

Askar Zhussupbekov, Professor
Eurasian National University;
5, Munaitpassov street, Astana,
010000, Kazakhstan

INVITED REVIEWERS

Akimbek A. Abdikalikov, Professor, Dr.Sc.,
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N. Isanov;
34 Malydybayeva Str., Bishkek, 720020, Biskek, Kyrgyzstan

Vadim K. Akhmetov, Professor, Dr.Sc.
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Ján Čelko, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Stanislaw Jemioło, Professor, Dr.Sc.,
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

Konstantin I. Khenokh, M.Ing., M.Sc.
General Dynamics C4 Systems; 8201 E McDowell Rd, Scottsdale, AZ 85257, USA

Christian Koch, Dr.-Ing.
Ruhr-Universität Bochum;
Lehrstuhl für Informatik im Bauwesen, Gebäude IA, 44780, Bochum, Germany

Gaik A. Manuylov, Professor, PhD
Moscow State University of Railway Engineering; 9, Obratsova Street, Moscow, 127994, Russia

Alexander S. Noskov, Professor, Dr.Sc.
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin;
19 Mira Street, Ekaterinburg, 620002, Russia

Nelli N. Rogacheva, Professor, Dr.Sc.
National Research Moscow State University of Civil Engineering;
26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia

Marina V. Shitikova, Professor, Dr.Sc.
Voronezh State Technical University; 14, Moscow Avenue, Voronezh, 394026, Russia

Grzegorz Świt, Professor, Dr.hab. Inż.,
Kielce University of Technology; 7, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego, Kielce, 25 – 314, Poland

Josef Vičan, Professor, PhD, Ing.
University of Žilina; Univerzitná 1, 010 26, Žilina, Slovakia

Artur Zbiciak, Associate Professor
Warsaw University of Technology; 1, Pl. Politechniki, 00-661, Warsaw, Poland

AIMS AND SCOPE

The aim of the Journal is to advance the research and practice in structural engineering through the application of computational methods. The Journal will publish original papers and educational articles of general value to the field that will bridge the gap between high-performance construction materials, large-scale engineering systems and advanced methods of analysis.

The scope of the Journal includes papers on computer methods in the areas of structural engineering, civil engineering materials and problems concerned with multiple physical processes interacting at multiple spatial and temporal scales. The Journal is intended to be of interest and use to researches and practitioners in academic, governmental and industrial communities.

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЖУРНАЛЕ

International Journal

for Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций)

Международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” (IJCCSE) является ведущим научным периодическим изданием по направлению «Инженерные и технические науки», издаваемым, начиная с 1999 года. В журнале на высоком научно-техническом уровне рассматриваются проблемы численного и компьютерного моделирования в строительстве, актуальные вопросы разработки, исследования, развития, верификации, апробации и приложений численных, численно-аналитических методов, программно-алгоритмического обеспечения и выполнения автоматизированного проектирования, мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического и экспериментального обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов гражданского и промышленного строительства, энергетики, машиностроения, транспорта, биотехнологий и других высокотехнологичных отраслей.

В редакционный совет журнала входят известные российские и зарубежные деятели науки и техники. Основным критерий отбора статей для публикации в журнале – их высокий научный уровень, соответствие которому определяется в ходе высококвалифицированного рецензирования и объективной экспертизы, поступающих в редакцию материалов.

Журнал входит в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук. В Российской Федерации журнал индексируется Российским индексом научного цитирования (РИНЦ). *Журнал входит в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI), полностью интегрированную с платформой Web of Science.* Журнал имеет международный статус и высылается в ведущие библиотеки и научные организации мира.

Издатели журнала – Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/ (Россия, г. Москва) и Издательский дом Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк). Партнерами издания является *Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН)* и *Научно-исследовательский центр СтаДиО (ЗАО НИЦ СтаДиО)*.

Цели журнала – демонстрировать в публикациях российскому и международному профессиональному сообществу новейшие достижения науки в области вычислительных методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, прежде всего в области строительства.

Задачи журнала:

– предоставление российским и зарубежным ученым и специалистам возможности опубликовать результаты своих исследований;

– привлечение внимания к наиболее актуальным, перспективным, прорывным и интересным направлениям развития и приложений численных и численно-аналитических методов решения фундаментальных и прикладных технических задач, совершенствования технологий математического, компьютерного моделирования, разработки и верификации реализующего программно-алгоритмического обеспечения;

– обеспечение обмена мнениями между исследователями из разных регионов и государств.

Тематика журнала. К рассмотрению и публикации в журнале принимаются аналитические материалы, научные статьи, обзоры, рецензии и отзывы на научные публикации по фундаментальным и прикладным вопросам технических наук, прежде всего в области строительства. В журнале также публикуются информационные материалы, освещающие научные мероприятия и передовые достижения Российской академии архитектуры и строительных наук, научно-образовательных и проектно-конструкторских организаций.

Тематика статей, принимаемых к публикации в журнале, соответствует его названию и охватывает направления научных исследований в области разработки, исследования и приложений численных и численно-аналитических методов, программного обеспечения, технологий компьютерного моделирования в решении прикладных задач в области строительства, а также соответствующие профильные специальности, представленные в диссертационных советах профильных образовательных организациях высшего образования.

Редакционная политика. Политика редакционной коллегии журнала базируется на современных юридических требованиях в отношении авторского права, законности, плагиата и клеветы, изложенных в законодательстве Российской Федерации, и этических принципах, поддерживаемых сообществом ведущих издателей научной периодики.

За публикацию статей плата с авторов не взимается. Публикация статей в журнале бесплатная. На платной основе в журнале могут быть опубликованы материалы рекламного характера, имеющие прямое отношение к тематике журнала.

Авторам. Прежде чем направить статью в редакцию журнала, авторам следует ознакомиться со всеми материалами, размещенными в разделах сайта журнала (интернет-сайт Российской академии архитектуры и строительных наук (<http://raasn.ru>); подраздел «Издания РААСН» или интернет-сайт Издательства АСВ (<http://iasv.ru>); подраздел «Журнал IJCCSE»); с основной информацией о журнале, его целях и задачах, редакционной политикой, порядком рецензирования направляемых в журнал статей и пр.

Подписка. Журнал зарегистрирован в Федеральном агентстве по средствам массовой информации и охраны культурного наследия Российской Федерации. Индекс в общероссийском каталоге РОСПЕЧАТЬ – 18076.

По вопросам подписки на международный научный журнал “International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций)” обращайтесь в Агентство «Роспечать» (Официальный сайт в сети Интернет: <http://www.rospr.ru/>) или в издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ) в соответствии со следующими контактными данными:

ООО «Издательство АСВ»

Юридический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26, офис 705;

Фактический адрес: 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 19, корп. 1, 5 этаж, офис 12 (ТЦ Мебель России);

Телефоны: +7 (925) 084-74-24, +7 (926) 010-91-33

Интернет-сайт: www.iasv.ru. Адрес электронной почты: iasv@iasv.ru.

Контактная информация.

По всем вопросам работы редакции, рецензирования, согласования правки текстов и публикации статей следует обращаться к главному редактору журнала *Сидорову Владимиру Николаевичу* (e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com, iasv@iasv.ru, sidorov@raasn.ru) или техническому редактору журнала *Кайтукову Таймуразу Батразовичу* (адреса электронной почты: kaytukov@raasn.ru; tkaytukov@gmail.com). Кроме того, по указанным вопросам, а также по вопросам размещения в журнале рекламных материалов можно обращаться к генеральному директору ООО «Издательство АСВ» *Никитиной Надежде Сергеевне* (адреса электронной почты: iasv@iasv.ru, nsnikitina@mail.ru, ijccse@iasv.ru).

Журнал становится технологичнее. Издательство ACB с сентября 2016 года является членом Международной ассоциации издателей научной литературы (PILA), осуществляющей свою деятельность на платформе CrossRef. Оригинальным статьям, публикуемым в журнале, будут присваиваться уникальные номера (индексы DOI – Digital Object Identifier), что значительно облегчит поиск метаданных и местонахождение полнотекстового произведения. DOI – это система определения научного контента в сети Интернет.

CrossRef – независимая организация, образованная в 2000 году по инициативе группы научных издателей. Инициатором разработки технологии стало издательство Wiley. Технология использования ссылок (DOI) принадлежит агентству CrossRef.

Publishers International Linking Association (PILA) – Международная ассоциация по связям издателей – является управляющей структурой агентства CrossRef – агрегатора и регистратора DOI, а также международной базой научных статей и их метаданных (www.crossref.org). На настоящий момент в базе несколько десятков миллионов материалов.

Использование этой технологии позволит представить информацию о журнале на международной платформе издателей научной литературы CrossRef, обеспечит удобный и принятый в мировом научном сообществе доступ к полнотекстовой электронной версии. Это значительно облегчит поиск научной информации, что способствует повышению наукометрических показателей авторов статей, публикуемых в журнале. Если, например, у произведения российского автора есть DOI и если на его работу имеется ссылка в публикации зарубежного коллеги в журнале, включенном в Web of Science и Scopus, то такое произведение автоматически попадает в эти базы данных и получает в нем собственный индекс цитируемости.

Все журналы, индексируемые в международной базе научного цитирования Web of Science и большинство периодических изданий, индексируемых в международной базе Scopus, имеют DOI. Использование цифрового идентификатора говорит прежде всего о технологическом качестве научного издания и является неотъемлемым атрибутом системы научной коммуникации за счет эффективного обеспечения процессов обмена научной информацией.

С октября 2016 года стал возможным прием статей на рассмотрение и рецензирование через он-лайн систему приема статей Open Journal Systems на сайте журнала:

<http://ijccse.iasv.ru/index.php/IJCCSE>

Автор имеет возможность следить за продвижением статьи в редакции журнала в личном кабинете Open Journal Systems и получать соответствующие уведомления по электронной почте.

International Journal for
Computational Civil and Structural Engineering

(Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций)

Volume 13, Issue 1

2017

TABLE OF CONTENTS (СОДЕРЖАНИЕ)

Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты	<u>9</u>
<i>Л.С. Ляхович, П.А. Акимов, Б.А. Тухфатуллин</i>	
О решении многоточечных краевых задач расчета конструкций в двумерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов	
Часть 1: Постановка и общие принципы аппроксимации задач	<u>23</u>
<i>П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, О.А. Негрозов</i>	
Моделирование усиления конструкций композитными материалами в программном комплексе «ЛИРА-САПР»	<u>34</u>
<i>М.С. Барабаш, А.В. Пикуль, О.Ю. Башинская</i>	
Применение компьютерного моделирования при оценке напряженно-деформированного состояния несущих конструкций зданий из каменной кладки	<u>42</u>
<i>А.И. Бедов, А.И. Габитов, А.А. Галлямов, А.С. Салов, А.М. Гайсин</i>	
Удар летящего объекта о подвеску висячего моста с анализом разрушений	<u>50</u>
<i>В.Б. Зылев, Н.А. Григорьев</i>	
Анализ напряженно-деформированного состояния плитных конструкций в приопорных зонах	<u>55</u>
<i>О.В. Кабанцев, К.О. Песин, А.В. Карлин</i>	
Расчет задачи фильтрации на входе фильтра	<u>63</u>
<i>Л.И. Кузьмина, Ю.В. Осипов</i>	
Двухэтапный сеточный метод решения краевых задач строительной механики на основе использования дискретного базиса Хаара	<u>69</u>
<i>М.Л. Мозгалева</i>	
Мобилизованность как характеристика надежности строительных конструкций	<u>86</u>
<i>А.В. Перельмутер</i>	

Поиск и определение размеров конструктивных пустот с помощью георадарной томографии на примере двух колонн <i>М.С. Судакова, Е.Б. Терентьева, А.Ю. Калашников</i>	<u>94</u>
The Impact of Coupling Thermoelasticity Equations on Settlement of Structures on Frozen Soil <i>Roman N. Stepanov, Fedor B. Kiselyov, Filipp V. Sergeyev</i>	<u>110</u>
Лауреаты XX Конкурса на медали и дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук за лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук за 2016 год	<u>116</u>
Об итогах VI Международной научной конференции «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»)	<u>130</u>
К Юбилею Виктора Сергеевича Федорова	<u>133</u>

КРИТЕРИИ МИНИМАЛЬНОЙ МАТЕРИАЛОЕМКОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ИЛИ НА ВЕЛИЧИНУ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Л.С. Ляхович¹, П.А. Акимов^{2,3,4,5}, Б.А. Тухфатуллин¹

¹Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, РОССИЯ

²Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

³ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

⁴Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

⁵Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В большинстве работ по оптимизации сооружений при постановке проблемы используется аппарат математического программирования. Однако в ряде исследований были выявлены особые свойства оптимальных систем и сформулированы критерии, позволяющие оценивать близость оптимальных решений к минимально материалоемкому. В частности были созданы соответствующие критерии, для стержней с прямоугольным поперечным сечением при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний. Вместе с тем не все особенности некоторых критериев были отмечены. Кроме того представляется целесообразным выявление соответствующих критериев для частных случаев набора варьируемых параметров. В данной статье отмечается еще одно дополнительное свойство критерия близости оптимального решения к минимально материалоемкому для стержней с прямоугольным поперечным сечением при ограничении на величину первой частоты собственных колебаний, модифицируется один из ранее предложенных критериев, а также формулируется соответствующий критерий для случая, когда один из варьируемых параметров прямоугольного сечения не изменяется по длине стержня.

Ключевые слова: оптимизация, системы минимальной материалоемкости, особые свойства, устойчивость, частота, критическая сила, формы потери устойчивости, собственных колебаний приведенные напряжения

CRITERIA OF MINIMUM MATERIALS CONSUMPTION FOR BARS WITH RECTANGULAR CROSS-SECTION AND RESTRICTIONS ON STABILITY OR LIMITATIONS ON THE VALUE OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY

Leonid S. Lyakhovich¹, Pavel A. Akimov^{2,3,4,5}, Boris A. Tukhfatullin¹

¹Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, RUSSIA

²Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

³Scientific Research Center "StaDyO", Moscow, RUSSIA

⁴National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

⁵Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

Abstract: Apparatus of mathematical programming is normally used in the most part of research works, dealing with structural optimization. However, the special properties of optimal systems have been identified in several studies. Besides, corresponding criteria, which have been formulated as well, can be used for assessments of proximity of optimal solutions to minimal material consumption. Particularly relevant criteria for bars with rectangular cross-section and restrictions on the stability or limitations on the value of the first natural frequency

have been formulated. However, not all the features of some of the criteria have been observed. In addition it seems appropriate to identify relevant criteria for special cases set variable parameters. The distinctive paper contains additional property proximity criterion of optimal solutions to minimal consumption of materials for the bars with a rectangular cross-section and limitations on the value of the first natural frequency, modification of one of the previously proposed criteria and formulation of appropriate criterion for the case where one of the parameters of variable rectangular cross-section is constant along the length of the bar.

Keywords: structural optimization, systems of minimum material consumption, special properties of optimal systems, stability, frequency, critical load, buckling modes, reduced stresses of natural vibrations

Существует точка зрения, которая относит методы оптимизации к чисто теоретическим изысканиям, имеющим очень ограниченное практическое значение. Действительно, во многих случаях оптимальные проекты не учитывают ряд особенностей сооружений и оказываются технологически трудно реализуемыми. Однако по мере развития методов оптимизации, изучения свойств оптимальных систем появляются возможности сближения методов оптимального и реального проектирования [1]. Здесь уместно привести слова академика АН СССР М.А. Лаврентьева *«Всегда вслед за познанием сил природы идет овладение ими»*. Есть достаточно оснований полагать, что по мере своего совершенствования методы оптимизации в ближайшее время будут играть более существенную роль в реальном проектировании. Оптимальный проект, полученный даже без формализованного учета в процессе оптимизации некоторых ограничений, может оказаться полезным и при реальном проектировании. Определенный интерес представляют две функции оптимального проекта.

Во-первых, оптимальный проект может рассматриваться как идеализированный объект в смысле предельного. Эта функция оптимального проекта позволяет оценивать реальное конструкторское решение по критерию его близости к предельному (например, по материалоемкости, несущей способности, динамическим характеристикам и так далее).

Во-вторых, оптимальный проект может использоваться как некий ориентир при реальном проектировании. При таком подходе последнее может рассматриваться как поэтап-

ный процесс отхода от идеального объекта с целью выполнения требований, не учтенных в оптимальном проекте или как движение от начального варианта в направлении идеального объекта. Следует отметить, что при этом на каждом этапе реального проектирования появляется возможность оценки изменения показателя оптимальности объекта по сравнению, как с начальным, так и с идеализированным решением [5-7,17].

Как известно, наряду с большим числом работ по оптимизации сооружений, в которых задачи формулируются и решаются на основе аппарата математического программирования [1], начиная с работ Ж.-Л. Лагранжа [18], Т. Клаузена [17], Е.Л. Николаи [8], появляются исследования, в которых выявляются особые свойства оптимальных систем и формулируются критерии, позволяющие оценивать близость полученных решений к минимально материалоемкому. В частности, это работы Н.Г. Ченцова [13], А.Ф. Смирнова [12], А.И. Виноградова [2], Я.Л. Нудельмана [9], Н. Ольхоффа [10] и других авторов.

Так в [5] был сформулирован критерий минимальной материалоемкости для стержней с прямоугольным поперечным сечением (рис. 1) при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний. Стержень несет распределенную массу и загружен продольной силой. Величины массы и продольной силы могут изменяться по длине стержня (рис. 2). Граничные условия в главных плоскостях могут отличаться от показанных на рис. 2.

Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты

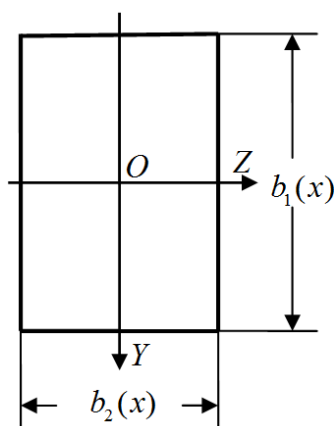


Рисунок 1. Поперечное сечение стержня.

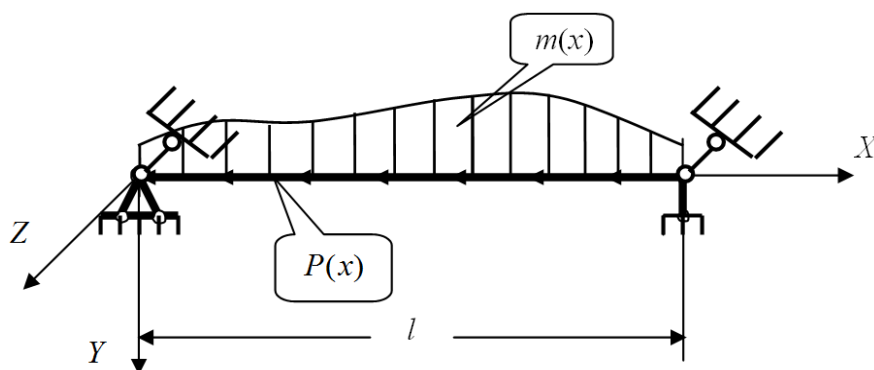


Рисунок 2. Схема рассматриваемого стержня.

Варьируемые параметры – размеры сечений стержня $b_1(x)$ и $b_2(x)$, а функционал цели – объем материала стержня

$$V_0 = \int_0^l b_1(x)b_2(x)dx, \quad (1)$$

где l – длина стержня; V_0 – объем материала стержня.

Ограничения на величину низшей частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции могут быть записаны в следующем виде

$$\omega_0 k_\omega \leq \omega_{1,1}; \quad (2)$$

$$\omega_0 k_\omega \leq \omega_{2,1}, \quad (3)$$

где ω_0 – заданная частота; k_ω – установленный коэффициент запаса; $\omega_{1,1}$ и $\omega_{2,1}$ – соответственно низшие частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции.

Если ограничения (2) и (3) будут выполняться в виде равенств, то они, очевидно, переписываются в следующем виде

$$\omega_0 k_\omega = \omega_{1,1} = \omega_{2,1}. \quad (4)$$

Соответственно в оптимизационной задаче требуется отыскать функции $b_1(x)$, $b_2(x)$,

которые придадут функционалу (1) минимальное значение при условиях, что будут выполнены ограничения (4).

При разных граничных условиях в главных плоскостях инерции критерий имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{1\omega}(x) &= \\ &= \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{4}E\rho(\omega_0 k_\omega)^2(v_\omega^2 + \frac{\sigma_{1\omega}^2}{\sigma_{2\omega}^2}w_\omega^2)} = \\ &= \text{const}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{2\omega}(x) &= \\ &= \sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{4}E\rho(\omega_0 k_\omega)^2(\frac{\sigma_{2\omega}^2}{\sigma_{1\omega}^2}v_\omega^2 + w_\omega^2)} = \\ &= \text{const}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma_{1\omega}(x)$, $\sigma_{2\omega}(x)$ – нормальные напряжения в крайних волокнах стержня, возникающие от изгибающих моментов, появляющихся при колебаниях по первой собственной форме в соответствующих главных плоскостях инерции; E – модуль упругости материала стержня; ρ – плотность материала стержня; $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$, $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$ – соответствующие приведенные напряжения; v_ω и w_ω – ординаты первых форм собственных колебаний в соответствующих главных плоскостях инерции.

При одинаковых граничных условиях в главных плоскостях инерции имеем

$$\sigma_{1\omega}(x) = \sigma_{2\omega}(x), \quad v_\omega = w_\omega \quad (7)$$

и критерий (5)-(6) переходит в

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2 - 1.5 \cdot (\omega_0 k_\omega)^2 E \rho v_\omega^2} = \text{const}; \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_{2\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{2\omega}^2 - 1.5 \cdot (\omega_0 k_\omega)^2 E \rho w_\omega^2} = \text{const}. \quad (9)$$

Если ограничения на низшую частоту собственных колебаний вводятся только в одной главной плоскости инерции, то критерии для соответствующих плоскостей инерции представляются в виде

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 E \rho v_\omega^2} = \text{const}; \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}_{2\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 E \rho w_\omega^2} = \text{const}. \quad (11)$$

Критерии (5)-(6) и (8)-(9) утверждают, что стержень минимальной материалоемкости при прямоугольных поперечных сечениях и ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции, является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ и $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях.

Соотношение критерия (10) соответствует случаю, когда ограничивается величина первой частоты собственных колебаний только в главной плоскости инерции $X-O-Y$, варьируется функция $b_1(x)$, а $b_2(x)$ задается. В этом случае стержень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции $X-O-Y$.

Соотношение критерия (11) соответствует случаю, когда ограничивается только величина первой частоты собственных колебаний в главной плоскости инерции $X-O-Z$, ва-

рьируется функция $b_2(x)$, а $b_1(x)$ задается. В этом случае стержень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции $X-O-Z$.

Критерии (5)-(6), (8)-(9) и (10)-(11) могут использоваться и в случаях, когда необходимо учитывать влияние продольной силы на частоту собственных колебаний. В случаях, когда вводятся только лишь ограничения по устойчивости, критерии переходят в известную форму (например [5,8]).

Для наглядности приведенные напряжения целесообразно нормировать таким образом, чтобы наибольшее значение каждого из $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ и $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$ по длине стержня было бы равно единице. Тогда близость полученного решения к минимально материалоемкому будет оцениваться соответственно близостью значений $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$ и $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$ по всей длине стержня к единице.

При выводе критерия (5)-(6), приведенном в [5], использовалось правило поиска условного экстремума. Учитывая, что при выполнении ограничений (4) энергетические функционалы принимают нулевые значения, был сформирован функционал $V_{0\omega}$, экстремум которого при варьировании $b_1(x)$ и $b_2(x)$ должен обеспечить как минимум функционала цели (1), так и нулевые значения энергетических функционалов.

$$\mathcal{E}_{\omega 1} = \frac{1}{2} \int_0^l \{ E J_1(x) (v_\omega'')^2 - P(x) (v_\omega')^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 [m(x) + \rho F(x) v_\omega^2] \} dx = 0; \quad (12)$$

$$\mathcal{E}_{\omega 2} = \frac{1}{2} \int_0^l \{ E J_2(x) (w_\omega'')^2 - P(x) (w_\omega')^2 - (\omega_0 k_\omega)^2 [m(x) + \rho F(x) w_\omega^2] \} dx = 0, \quad (13)$$

$$\text{где} \quad F(x) = b_1(x) b_2(x) \quad (14)$$

$$v_\omega' = dv_\omega / dx; \quad v_\omega'' = d^2 v_\omega / dx^2; \quad (15)$$

$$w_\omega' = dw_\omega / dx; \quad w_\omega'' = d^2 w_\omega / dx^2; \quad (16)$$

Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты

– площадь поперечного сечения; $m(x)$ и $P(x)$ показаны на рис. 2; $\mathcal{E}_{\omega 1}, \mathcal{E}_{\omega 2}$ – энергетические функционалы собственных колебаний в главных плоскостях инерции; $J_1(x), J_2(x)$ – соответствующие моменты инерции сечения.

Имеем:

$$V_{0\omega} = \int_0^l \{b_1(x) * b_2(x) - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^3(x)b_2(x)}{12} (v''_{\omega})^2 - P(x)(v'_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 (m(x) + \rho b_1(x)b_2(x)) v_{\omega}^2] - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_1(x)b_2^3(x)}{12} (w''_{\omega})^2 - P(x)(w'_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 (m(x) + \rho b_1(x)b_2(x)) w_{\omega}^2]\} dx, \quad (17)$$

где $\lambda_{\omega 1}, \lambda_{\omega 2}$ – неопределенные множители.

С учетом соотношений (12) и (13) рассматриваемая задача является изопериметрической [4], а $\lambda_{\omega 1}, \lambda_{\omega 2}$ постоянными величинами. Экстремум функционала (17) определялся решением уравнений [3]

$$(\delta V_{0\omega})_{b_1(x)} = 0; \quad (\delta V_{0\omega})_{b_2(x)} = 0, \quad (18)$$

где $(\delta V_{0\omega})_{b_1(x)}$ и $(\delta V_{0\omega})_{b_2(x)}$ – соответственно вариации функционала $V_{0\omega}$ по $b_1(x)$ и $b_2(x)$. В результате решения уравнений (18) был сформулирован критерий (5)-(6). Кроме того, при решении уравнений (18) было установлено соотношение

$$\lambda_{\omega 1} \sigma_{1\omega}^2(x) = \lambda_{\omega 2} \sigma_{2\omega}^2(x). \quad (19)$$

Учитывая, что $\lambda_{\omega 1}, \lambda_{\omega 2}$ постоянные величины, непосредственно из (19) следует, что

$$\frac{\sigma_{1\omega}^2(x)}{\sigma_{2\omega}^2(x)} = \frac{\lambda_{\omega 2}}{\lambda_{\omega 1}} = const, \quad (20)$$

$$\text{т.е.} \quad \frac{\sigma_{1\omega}(x)}{\sigma_{2\omega}(x)} = const. \quad (21)$$

Соотношения (20)-(21) не были отмечены в [5], а они определяют в дополнение к критерию (5)-(6) еще одно особое свойство минимально материалоемкого стержня прямоугольного поперечного сечения при ограничении величины первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции при разных граничных условиях. Это свойство (21) показывает, что и *при разных граничных условиях в главных плоскостях инерции в стержне минимальной материалоемкости с прямоугольным поперечным сечением при ограничении величины первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции отношение нормальных напряжений, возникающих в крайних волокнах стержня во всех сечениях одинаково*, при этом

$$\frac{\sigma_{1\omega}(x)}{\sigma_{2\omega}(x)} \neq 1. \quad (22)$$

Иллюстрацию этого свойства проведем на примере.

Пример 1. Рассматривается стержень прямоугольного сечения, несущий равномерно распределенную массу $m = 300 \text{ кг} / \text{м}$. Граничные условия в главной плоскости инерции $X - O - Y$ показаны на рис. 3а, а в плоскости $X - O - Z$ – на рис. 3б. При переходе к дискретной модели из 30 участков (далее i – номер участка) узловая масса составит 60 кг. Удельная масса $\rho = 2400 \text{ кг} / \text{м}^3$. Заданная величина первой круговой собственной частоты с учетом необходимого запаса принята

$$\omega_0 k_{\omega} = \omega_{1,1} = \omega_{2,1} = 30 \text{ сек}^{-1}.$$

Модуль упругости материала стержня $E = 24000 \text{ МПа}$. Оптимизация выполнялась методом случайного поиска. В решении использовалось ограничение малости размеров $b_1[i] \geq 0.0001$ и $b_2[i] \geq 0.0001$, где $b_1[i]$ и $b_2[i]$ – соответствующие размеры сечения стержня на i -м участке (сечении).

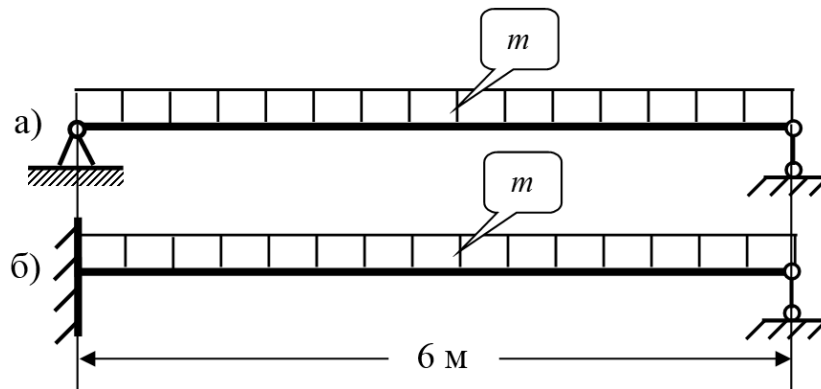


Рисунок 3. Рассматриваемый стержень прямоугольного сечения (пример 1).

Таблица 1. Результаты оптимизации (пример 1).

i	$b_1[i]$	$b_2[i]$	$\sigma_{1\omega}[i]$	$\sigma_{2\omega}[i]$	$\sigma_{1\omega}[i]/\sigma_{2\omega}[i]$	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$	$\bar{\sigma}_{2\omega}[i]$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0330	0.5949	0.6311	0.9096	0.6938	0.9990	1.0000
2	0.0711	0.3813	0.6323	0.9113	0.6938	0.9984	0.9992
3	0.1036	0.2944	0.6351	0.9144	0.6945	0.9991	0.9990
4	0.1350	0.2377	0.6376	0.9175	0.6950	0.9990	0.9982
5	0.1676	0.1937	0.6404	0.9224	0.6942	0.9990	0.9994
6	0.2034	0.1563	0.6427	0.9266	0.6936	0.9984	0.9996
7	0.2460	0.1223	0.6458	0.9306	0.6939	0.9989	0.9996
8	0.3042	0.0891	0.6486	0.9347	0.6939	0.9988	0.9995
9	0.4084	0.0538	0.6521	0.9392	0.6943	0.9989	0.9990
10	8.7805	0.0001	1.0000	0.0018	541.24	0.0144	0.0422
11	0.4495	0.0499	0.6646	0.9573	0.6942	0.9990	0.9993
12	0.3708	0.0760	0.6722	0.9674	0.6949	0.9995	0.9989
13	0.3351	0.0956	0.6787	0.9771	0.6946	0.9992	0.9989
14	0.3137	0.1109	0.6837	0.9856	0.6936	0.9981	0.9993
15	0.2985	0.1234	0.6884	0.9920	0.6940	0.9985	0.9992
16	0.2869	0.1333	0.6916	0.9968	0.6938	0.9986	0.9995
17	0.2771	0.1413	0.6935	0.9989	0.6942	0.9987	0.9991
18	0.2686	0.1475	0.6940	1.0000	0.6940	0.9992	0.9998
19	0.2607	0.1521	0.6927	0.9981	0.6940	0.9988	0.9994
20	0.2530	0.1552	0.6904	0.9945	0.6942	0.9990	0.9994
21	0.2453	0.1568	0.6865	0.9893	0.6939	0.9988	0.9996
22	0.2371	0.1570	0.6817	0.9815	0.6946	0.9991	0.9989
23	0.2285	0.1557	0.6756	0.9731	0.6943	0.9988	0.9991
24	0.2191	0.1528	0.6684	0.9639	0.6935	0.9983	0.9997
25	0.2082	0.1483	0.6616	0.9527	0.6944	0.9991	0.9991
26	0.1959	0.1416	0.6538	0.9423	0.6939	0.9988	0.9996
27	0.1811	0.1326	0.6465	0.9317	0.6940	0.9989	0.9996
28	0.1626	0.1202	0.6398	0.9217	0.6942	0.9989	0.9992
29	0.1377	0.1024	0.6342	0.9138	0.6940	0.9985	0.9992
30	0.0956	0.0714	0.6318	0.9096	0.6946	1.0000	0.9998

За начальное приближение было принято квадратное сечение, размеры которого при первом выходе на границу области допустимых решений составили 0.2241 м. Значение функции цели при этом $V_0 = 0.30134161 \text{ м}^3$. В конце процесса оптимизации функция цели $V_0 = 0.17430151 \text{ м}^3$, что на 72.89% меньше начальной величины. Результаты оптимизации представлены в таблице 1.

Во втором и третьем столбцах приведены размеры варьируемых величин $b_1[i]$ и $b_2[i]$. В седьмом и восьмом столбцах показаны соответствующие приведенные напряжения $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ и $\bar{\sigma}_{2\omega}[i]$ на i -м участке, близость которых к единице по всей длине стержня кроме десятого сечения подтверждает оптимальность полученного решения. Размер $b_2[10] = 0.0001 \text{ м}$ конструктивно ограничен. В сечениях, где конструктивные ограничения выполняются в виде равенства приведенные выше критерии не соблюдаются. В четвертом и пятом столбцах показаны соответствующие нормальные напряжения в крайних волокнах в обеих главных плоскостях инерции $\sigma_{1\omega}[i]$ и $\sigma_{2\omega}[i]$ на i -м участке. Напряжения нормированы таким образом, чтобы наибольшее значение по длине стержня каждого из $\sigma_{1\omega}[i]$, $\sigma_{2\omega}[i]$ было бы равно единице. Как видно из таблицы 1, напряжения $\sigma_{1\omega}[i]$ и $\sigma_{2\omega}[i]$ изменяются по длине стержня, а отношения между ними $\sigma_{1\omega}[i]/\sigma_{2\omega}[i]$ (шестой столбец), с точностью до долей процента остаются постоянными по всей длине стержня кроме десятого сечения. Полученный результат иллюстрирует свойство (21) и дополняет критерий (5)-(6). Таким образом, близость полученных решений к минимально материалоемкому для стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничении величины первой частоты собственных колебаний и при разных граничных условиях в главных плоскостях инерции может оцениваться как по критерию (5)-(6), так и по свойству (21).

В [5] также сформулирован критерий оценивающий близость полученных решений к минимально материалоемкому при ограничении величины первой частоты собственных колебаний для стержней с таким типом поперечного сечения, для которого радиус инерции при оптимизации не зависит от x . К такого рода сечениям относится и прямоугольное. Соответствующие критерии сформулированы в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 E \rho w_\omega^2} = \text{const}; \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{2\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 E \rho w_\omega^2} = \text{const}, \quad (24)$$

где $\sigma_{1\omega}(x)$, $\sigma_{2\omega}(x)$ нормальные напряжения, возникающие от изгибающих моментов, появляющихся при собственных колебаниях в соответствующей главной плоскости инерции в волокнах, отстоящих от нейтрального слоя на расстоянии радиусов инерции $(r_{i1}(x), r_{i2}(x))$; $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$, $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$ – соответствующие приведенные напряжения.

Приведем отличия в постановке задач оптимизации для стержней с прямоугольным сечением при использовании критерия (23)-(24) от случаев, относящихся к критерию (10)-(11).

В отличие от критерия (10)-(11) соотношение критерия (23) соответствует случаю, когда ограничивается величина первой частоты собственных колебаний в главной плоскости инерции $X - O - Y$, но варьируется функция $b_2(x)$, а $b_1(x)$ задается. В этом случае *стержень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции $X - O - Y$.*

Соотношение критерия (24) в отличие от критерия (10)-(11) соответствует случаю, когда ограничивается величина первой частоты собственных колебаний в главной плоскости инерции $X - O - Z$, варьируется функция $b_1(x)$, а $b_2(x)$ задается. В этом случае *стержень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции $X - O - Z$.*

жень минимальной материалоемкости является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях в главной плоскости инерции $X-O-Z$.

Для стержней с прямоугольными поперечными сечениями для единообразия с критериями (5)-(6), (8)-(9), (10)-(11) критерий (23)-(24) целесообразно модифицировать. Как известно, нормальное напряжение при изгибе в волокне, отстоящем от нейтрального слоя на расстоянии радиуса инерции сечения, равно

$$\sigma_{1\omega}(x) = [M_1(x) r_{i,1}(x)] / J(x), \quad (25)$$

где $r_{i,1}(x)$ – радиус инерции сечения.

Для прямоугольного сечения имеем:

$$r_{i,1}^2(x) = J(x) / [b_1(x)b_2(x)] = b_1^2(x) / 12,$$

откуда

$$r_{i,1}(x) = b_1(x) / (2\sqrt{3}). \quad (26)$$

Следовательно,

$$\sigma_{1\omega}(x) = [M_1(x)b_1(x)] / [J(x)2\sqrt{3}]. \quad (27)$$

Вместе с тем,

$$[M_1(x)b_1(x)] / [2J(x)] = \sigma_{1\omega}(x), \quad (28)$$

где $\sigma_{1\omega}(x)$ – нормальное напряжение в крайнем волокне.

Рассмотрев совместно (27) и (28), можем заключить, что

$$\sigma_{1\omega} = \sigma_{1\omega}(x) / \sqrt{3}. \quad (29)$$

Теперь соотношения (23)-(24) для стержней с прямоугольным поперечным сечением могут быть представлены в виде

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) / 3 - (\omega_0 k_\omega)^2 E \rho \omega_\omega^2} = \text{const}; \quad (30)$$

$$\sigma_{2\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x) / 3 - (\omega_0 k_\omega)^2 E \rho \omega_\omega^2} = \text{const}. \quad (31)$$

Рассмотрим постановку задачи оптимизации стержня с прямоугольным поперечным сечением и ограничением в обеих главных плоскостях инерции по устойчивости или величине первой частоты собственных колебаний в случае, когда варьируются оба размера сечения, но один из них не зависит от x . В начале сформулируем критерий близости решения задачи оптимизации к минимально материалоемкому при ограничении величины первой частоты собственных колебаний для случая, когда варьируется размер сечения b_1 , но он не меняется по длине стержня, а второй варьируемый размер $b_2(x)$ определяется в виде функции от x . Функция цели в этом случае принимает форму

$$V_0 = b_1 \int_0^l b_2(x) dx. \quad (32)$$

Итак, оптимизационная задача формулируется следующим образом: *требуется отыскать величину b_1 и функцию $b_2(x)$, которые придадут функции цели (30) минимальное значение при условии выполнения ограничений на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции (4).*

Ограничения в форме (4) требуют выполнения зависимостей (12)-(13). Используем для решения задачи метод поиска условного экстремума.

Сформируем интеграл, условия экстремума которого должны обеспечить как минимум функции цели (32), так и условие, что заданная частота ω_0 будет низшей собственной в обеих главных плоскостях инерции (т.е. условие (4)):

Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты

$$V_{0\omega} = b_1 \int_0^l b_2(x) dx - \lambda_{\omega 1} \int_0^l [E \frac{b_1^3 b_2(x)}{12} (v''_{\omega})^2 - P(x)(v'_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 (m(x) + \rho b_1 b_2(x)) v_{\omega}^2] dx - \lambda_{\omega 2} \int_0^l [E \frac{b_1 b_2^3(x)}{12} (w''_{\omega})^2 - P(x)(w'_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 (m(x) + \rho b_1 b_2(x)) w_{\omega}^2] dx. \quad (33)$$

Так как одна из двух варьируемых величин b_1 не является функцией, зависящей от x , а другая $b_2(x)$, напротив, является, интеграл (33) относительно b_1 должен рассматриваться как функция, а относительно $b_2(x)$ как функционал.

С учетом (12)-(13) приходим к изопериметрической задаче.

Очевидно, что вариации функционала $V_{0\omega}$ по v и w приведут к уравнениям собственных колебаний в главных плоскостях инерции, а вариации функционала $V_{0\omega}$ по $\lambda_{\omega 1}$ и $\lambda_{\omega 2}$ – к выполнению условий (12)-(13).

С учетом вышеизложенного для отыскания минимума функционала (33) требуется выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_1} = 0; \quad (\delta V_{0\omega})_{b_2(x)} = 0. \quad (34)$$

Соответственно имеем (воспользуемся ниже уравнением Эйлера, соответствующим второму условию (34) [14,15]):

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_1} = \int_0^l \{b_2(x) - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^2 b_2(x)}{4} (v''_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho b_2(x) v_{\omega}^2] - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_2^3(x)}{12} (w''_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho b_2(x) w_{\omega}^2]\} dx = 0; \quad (35)$$

$$\delta(V_{0\omega})_{b_2(x)} = b_1 - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^3}{12} (v''_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho b_1 v_{\omega}^2] - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_1 b_2^2(x)}{4} (w''_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho b_1 w_{\omega}^2] = 0. \quad (36)$$

Умножив все члены первого уравнения на b_1 , а второго на $b_2(x)$, и, воспользовавшись (14) будем иметь:

$$\int_0^l \{1 - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^2}{4} (v''_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho v_{\omega}^2] - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_2^2(x)}{12} (w''_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho w_{\omega}^2]\} F(x) dx = 0; \quad (37)$$

$$\{1 - \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_1^2}{12} (v''_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho v_{\omega}^2] - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_2^2(x)}{4} (w''_{\omega})^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho w_{\omega}^2]\} F(x) = 0. \quad (38)$$

Как известно нормальное напряжение при изгибе в крайнем волокне стержня определяется по формулам:

$$\sigma_1(x) = \frac{EJ(x)b_1 v''_{\omega}}{2J(x)} = \frac{Eb_1}{2} v''_{\omega}; \quad (39)$$

$$\sigma_2(x) = \frac{Eb_2(x)}{2} w''_{\omega}. \quad (40)$$

Умножив все члены полученных уравнений на E и проинтегрировав второе уравнение, можем с учетом (39)-(40) переписать их в следующем виде:

$$\int_0^l \{E - \lambda_{\omega 1} [\sigma_1^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho E v_{\omega}^2] - \lambda_{\omega 2} [\frac{1}{3} \sigma_2^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho E w_{\omega}^2]\} F(x) dx = 0. \quad (41)$$

$$\int_0^l \{E - \lambda_{\omega 1} [\frac{1}{3} \sigma_1^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho E v_{\omega}^2] - \lambda_{\omega 2} [\sigma_2^2 - (\omega_0 k_{\omega})^2 \rho E w_{\omega}^2]\} F(x) dx = 0. \quad (42)$$

Взяв разность уравнений (41) и (42), очевидно, будем иметь:

$$\frac{2}{3} \left[\lambda_{\omega 1} \int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x) F(x) dx - \lambda_{\omega 2} \int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x) F(x) dx \right] = 0,$$

т.е.

$$\lambda_{\omega 1} \int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x) F(x) dx = \lambda_{\omega 2} \int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x) F(x) dx, \quad (43)$$

откуда следует, что

$$\lambda_{\omega 2} = \lambda_{\omega 1} \frac{\int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x) F(x) dx}{\int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x) F(x) dx} = \lambda_{\omega 1} \mu_{\omega 1}, \quad (44)$$

где
$$\mu_{\omega 1} = \frac{\int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x) F(x) dx}{\int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x) F(x) dx}. \quad (45)$$

Разделив все члены уравнения (38) на $F(x)$, и умножив их на E , с учетом (39)-(40) и (45) получим:

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\frac{1}{3} \sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2 + \mu_{\omega 1} [\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2]} = \text{const}; \quad (49)$$

Аналогично формулируется критерий для случая, когда варьируется функция $b_1(x)$, а b_2 варьируется, но не зависит от x . Критерий имеет вид

$$\bar{\sigma}_{2\omega}(x) = \sqrt{\frac{1}{3} \sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2 + \mu_{\omega 2} [\sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2]} = \text{const}, \quad (50)$$

где

$$\mu_{\omega 2} = \frac{\int_0^l \sigma_{2\omega}^2(x) F(x) dx}{\int_0^l \sigma_{1\omega}^2(x) F(x) dx} \quad (51)$$

$$\{E - \lambda_{\omega 1} [\frac{1}{3} \sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2] - \lambda_{\omega 1} \mu_{\omega 1} [\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2]\} = 0 \quad (46)$$

или, что эквивалентно,

$$\lambda_{\omega 1} [\frac{1}{3} \sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2] + \lambda_{\omega 1} \mu_{\omega 1} [\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2] = E \quad (47)$$

С учетом постоянности величин $\lambda_{\omega 1}$ и E можем переписать (46) в виде

$$\frac{1}{3} \sigma_1^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E v_\omega^2 + \mu_{\omega 1} [\sigma_2^2(x) - (\omega_0 k_\omega)^2 \rho E w_\omega^2] = \text{const}. \quad (48)$$

Итак, показано, что стержень минимальной материалоемкости прямоугольного поперечного сечения при ограничении по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний для случая, когда параметр сечения b_1 варьируется, но не зависит от x , а параметр $b_2(x)$ варьируется по всей длине стержня. является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях или при потере устойчивости. Здесь

Критерий (50) утверждает, что *стержень минимальной материалоемкости прямоугольного поперечного сечения при ограничении по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний для случая, когда параметр сечения $b_1(x)$ варьируется по всей длине стержня, а параметр b_2 варьируется, но не зависит от x , является бруском равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{2\omega}(x)$, возникающим при собственных колебаниях или при потере устойчивости.*

Критерии (23)-(24), (30)-(31), (49), (50) могут использоваться и при необходимости учитывать влияние продольной силы на величину частоты собственных колебаний. Эти критерии также могут применяться и для случаев, когда вводятся ограничения на величину первой критической силы.

Проведем на примерах иллюстрацию различия постановок оптимизационных задач при использовании критериев (5)-(6), (10)-(11), (30)-(31), (49).

Постановка задачи при использовании критерия (5)-(6) и свойства (20)-(21) приведена в примере 1: *При ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции (4) требовалось отыскать функции $b_1(x)$ и $b_2(x)$, придающие функционалу цели (1) минимальное значение.*

Иллюстрацию постановок задач при использовании критериев (10)-(11), (30)-(31), (49) проведем в примере 2.

Пример 2. Рассмотрим стержень, схема которого в главных плоскостях инерции одинакова и приведена на рис. 3а. Стержень несет равномерно распределенную массу. При переходе к дискретной модели из 30 участков узловая масса составит 60 кг. Удельная масса $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$. Модуль упругости материала стержня $E = 24000 \text{ МПа}$. Оптимизация выполнялась методом случайного поиска. За начальное приближение было принято квадратное сечение, размеры которого при первом выходе

на границу области допустимых решений составили 0.2241 м. Значение функции цели при этом $V_0 = 0.30134161 \text{ м}^3$.

При использовании критерия (49) *ограничение на величину первой частоты собственных колебаний в обеих главных плоскостях инерции с учетом необходимого запаса принималась в виде $\omega_o k_\omega = \omega_{1,1} = \omega_{2,1} = 30 \text{ сек}^{-1}$. Требовалось отыскать величину высоты сечения b_1 и функцию, изменения ширины сечения $b_2[i]$, которые бы придавали функции цели*

$$V_0 = b_1 \sum_{i=1}^{30} b_2[i]$$

минимальное значение. Результаты приведены в таблице 2. Над столбцами 2 и 3 показано оптимальное значение высоты сечения $b_1 = 0.2219 \text{ м}$. В столбце 2 оптимальные значения функции $b_2[i]$, а в столбце 3 значения приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$. Близость значений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ к единице свидетельствует об оптимальности решения. Под столбцами 2 и 3 приведена функция цели и процент ее отличия от первоначального значения при выходе на границу допустимой области. Постановка задачи при использовании критерия (50) аналогична.

При использовании первого соотношения критерия (30)-(31) *ограничивается величина первой частоты собственных колебаний только в главной плоскости инерции $X - O - Y$ ($\omega_o k_\omega = \omega_{1,1} = 30 \text{ сек}^{-1}$), варьируется функция изменения ширины сечения $b_2[i]$, а высота сечения $b_1[i]$ задается.*

В этом примере принята постоянная высота сечения $b_1[i] = b_1 = 0.2241 \text{ м}$. Результаты приведены в таблице 2. Над столбцами 4 и 5 показано принятое значение высоты сечения $b_1 = 0.2241 \text{ м}$. В столбце 4 оптимальные значения функции $b_2[i]$, а в столбце 5 значения приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$.

Таблица 2. Результаты оптимизации (пример 2).

i	Варианты					
	$b_1 = 0.2219 \text{ м}$		$b_1 = 0.2241 \text{ м}$		$b_2 = 0.2241 \text{ м}$	
	$b_2[i]$	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$	$b_2[i]$	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$	$b_1[i]$	$\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$
1	2	3	4	5	6	7
1	0.0583	0.9998	0.0181	0.9966	0.0612	0.9998
2	0.1016	1.0000	0.0535	0.9993	0.1055	1.0000
3	0.1314	0.9996	0.0871	0.9994	0.1353	0.9998
4	0.1553	0.9994	0.1181	0.9997	0.1586	1.0000
5	0.1753	0.9995	0.1462	0.9995	0.1776	0.9998
6	0.1924	0.9993	0.1711	0.9997	0.1937	1.0000
7	0.2070	0.9995	0.1930	0.9996	0.2072	0.9996
8	0.2195	0.9992	0.2118	0.9994	0.2187	0.9997
9	0.2301	0.9997	0.2278	0.9997	0.2283	0.9999
10	0.2390	0.9995	0.2410	0.9998	0.2363	1.0000
11	0.2462	0.9998	0.2519	1.0000	0.2428	0.9996
12	0.2519	0.9997	0.2604	0.9997	0.2479	0.9998
13	0.2561	0.9997	0.2667	0.9993	0.2516	0.9999
14	0.2590	0.9992	0.2708	0.9993	0.2541	0.9999
15	0.2603	0.9995	0.2728	0.9997	0.2553	0.9999
16	0.2603	0.9995	0.2728	0.9997	0.2553	0.9999
17	0.2590	0.69992	0.2708	0.9993	0.2541	0.9999
18	0.2561	0.9997	0.2667	0.9993	0.2516	0.9999
19	0.2519	0.9997	0.2604	0.9997	0.2479	0.9998
20	0.2462	0.9998	0.2519	1.0000	0.2428	0.9996
21	0.2390	0.9995	0.2411	0.9998	0.2363	1.0000
22	0.2301	0.9997	0.2278	0.9997	0.2283	0.9999
23	0.2195	0.9992	0.2118	0.9994	0.2187	0.9997
24	0.2070	0.9995	0.1930	0.9996	0.2072	0.9996
25	0.1924	0.9993	0.1711	0.9997	0.1937	1.0000
26	0.1753	0.9995	0.1462	0.9995	0.1776	0.9998
27	0.1553	0.9994	0.1181	0.9997	0.1586	1.0000
28	0.1314	0.9996	0.0871	0.9994	0.1353	0.9998
29	0.1016	1.0000	0.0535	0.9993	0.1055	1.0000
30	0.0583	0.9998	0.0181	0.9966	0.0612	0.9998
$V_0 \text{ м}^3, \%$	0.2648 м^3 12.11%		0.2501 м^3 17.00%		0.2666 м^3 11.53%	

Близость значений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ к единице свидетельствует об оптимальности решения. Под столбцами 4 и 5 приведена функция цели и процент ее отличия от первоначального значения при выходе на границу допустимой области. Постановка задачи при использова-

нии второго соотношения критерия (30)-(31) аналогична.

При использовании критериального соотношения критерия (10) *ограничивается величина первой частоты собственных колебаний только в главной плоскости инерции*

$X - O - Y$ ($\omega_o k_\omega = \omega_{1,1} = 30 \text{ сек}^{-1}$), варьируются величины $b_1[i]$, а $b_2[i]$ задаются. В этом примере принята постоянная ширина сечения $b_2[i] = b_2 = 0.2241 \text{ м}$. Результаты приведены в таблице 2. Над столбцами 6 и 7 показано принятое значение ширины сечения $b_2 = 0.2241 \text{ м}$. В столбце 6 оптимальные значения функции $b_1[i]$, а в столбце 7 значения приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$. Близость значений $\bar{\sigma}_{1\omega}[i]$ к единице свидетельствует об оптимальности решения. Под столбцами 6 и 7 приведена функция цели и процент ее отличия от первоначального значения при выходе на границу допустимой области. Постановка задачи при использовании критериального соотношения (12) аналогична.

Итак, в данной статье отмечается еще одно дополнительное свойство ранее сформулированного [5] критерия близости оптимального решения к минимально материалоемкому для стержней с прямоугольным поперечным сечением при ограничении на величину первой частоты собственных колебаний. Для стержней прямоугольного поперечного сечения проведена модификация критерия (21)–(22), предложенного в [5]. Сформулирован новый критерий для стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или величины первой частоты собственных колебаний для случая, когда один из варьируемых параметров прямоугольного сечения не изменяется по длине стержня. На примерах приведена иллюстрация различий в постановках оптимизационных задач при использовании рассмотренных критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баничук Н.В.** Введение в оптимизацию конструкций. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
2. **Виноградов А.И.** Проблема оптимального проектирования в строительной механике. Цикл лекций. – Харьков: Вища школа, Издательство при Харьковском университете, 1973. – 167 с.
3. **Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
4. **Гельфонд И.М., Фомин С.В.** Вариационное исчисление. – М.: Физматлит, 1961. – 228 с.
5. **Ляхович Л.С.** Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. – Томск: Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2009. – 372 с.
6. **Ляхович Л.С., Малиновский А.П., Тухфатуллин Б.А.** Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 12, Issue 2, 2016, pp. 118-125.
7. **Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.** Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 14-23.
8. **Николаи Е.Л.** Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны. // Известия Петербургского политехнического института, Том 8, Вып. 1, 1907, с. 255-288.
9. **Нудельман Я.Л.** Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. – М.: Гостехиздат, 1949. – 175 с.
10. **Ольхофф Н., Расмуссен С.Х.** О простых и двухкратных оптимальных критических нагрузках потери устойчивости для защемленных стержней. // Механика. Новое в зарубежной науке. Оптимальное проектирование конструкций, №27. – М.: Мир, 1981, с. 139-154.
11. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы. – М.: АСВ, 2005.

- 736 с.
12. **Смирнов А.Ф.** Устойчивость и колебания сооружений. – М.: Трансжелдориздат, 1958. – 571 с.
 13. **Ченцов Н.Г.** Стойки наименьшего веса. // Труды ЦАГИ, Вып. 265, 1936. – 48 с.
 14. **Эльсгольц Л.Э.** Вариационное исчисление. – М.: ЛКИ, 2014. – 208 с.
 15. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
 16. **Clausen T.** Über die form architektonischer Säulen // Bull. cl. physico-math. Acad. St.-Petersbourg, Vol. 9, 1851, pp. 371-380 (in Russian).
 17. **Lyakhovich L.S.** Dual approach to solving the problems of structural optimization. // Procedia Engineering, Volume 111, 2015, pp. 510-515.
 18. **Lagrange J.-L.** Sur la figure des colonnes // Mescellanea Taurinensia, Vol. 5, 1770-1773, pp. 123.

Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; e-mail: lls@tsuab.ru

Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Boris A. Tukhfatullin, Associate Professor, Ph.D, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 634003, Russia, Tomsk, Solyanaya St., 2; e-mail: prtsuab@mail.ru

Ляхович Леонид Семенович, академик РААСН, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: lls@tsuab.ru

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Тухфатуллин Борис Ахатович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Томский государственный архитектурно-строительный университет; 634003, Россия, г. Томск, Соляная пл. 2; e-mail: prtsuab@mail.ru

Leonid S. Lyakhovich, Full Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, DSc, Head of Department of Structural Mechanics,

О РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ОСНОВЕ СОВМЕЩНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТЬ 1: ПОСТАНОВКА И ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ

П.А. Акимов^{1,2,3,4}, В.Н. Сидоров^{5,6,7}, О.А. Негрозов^{1,3}

¹ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

² ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, РОССИЯ

³ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

⁴ Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры
и строительных наук, г. Москва, РОССИЯ

⁵ Российский университет дружбы народов, г. Москва, РОССИЯ

⁶ Московский архитектурный институт (государственная академия), г. Москва, РОССИЯ

⁷ Kielce University of Technology, Kielce, POLAND

Аннотация: В настоящей статье рассматриваются постановка и общие принципы аппроксимации много-точечной краевой задачи статического расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. В частности, представлены расчетная модель и общая постановка задачи, общие принципы аппроксимации области, принятые правила нумерации подобластей, правила нумерации конечных элементов и дискретно-континуальных конечных элементов; описано построение дискретной (конечноэлементной) и дискретно-континуальной аппроксимирующих моделей на подобластях.

Ключевые слова: дискретно-континуальный метод конечных элементов, метод конечных элементов, расчеты строительных конструкций, двумерные задачи, постановки задач, аппроксимация

ABOUT SOLUTION OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEMS OF TWO-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS WITH THE USE OF COMBINED APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD AND DISCRETE-CONTINUAL FINITE ELEMENT METHOD PART 1: FORMULATION AND BASIC PRINCIPLES OF APPROXIMATION

Pavel A. Akimov^{1,2,3,4}, Vladimir N. Sidorov^{5,6,7}, Oleg A. Negrozov^{1,3}

¹ Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

² Scientific Research Center “StaDyO”, Moscow, RUSSIA

³ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

⁴ Research Institute of Building Physics of Russian Academy
of Architecture and Construction Sciences, Moscow, RUSSIA

⁵ The Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, RUSSIA

⁶ Moscow Institute of Architecture (State Academy), Moscow, RUSSIA

⁷ Kielce University of Technology, Kielce, POLAND

Abstract: The distinctive paper is devoted to formulation and basic principles of approximation of multipoint boundary problem of static analysis of deep beam with the use of combined application of finite element method and discrete-continual finite element method. Design model, general formulation of the problem, basic principles of domain approximation, rule of numbering of subdomains, rule of numbering of finite elements, rule of numbering of discrete-continual finite elements are considered. Construction of discrete (finite element) and discrete-continual approximation models for subdomains is under consideration as well.

Keywords: discrete-continual finite element method, finite element method, structural analysis, two-dimensional problems, formulation of problems, approximation

В настоящей статье рассматриваются постановка и общие принципы аппроксимации многоточечной краевой задачи статического расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов (МКЭ) и дискретно-континуального метода конечных элементов (ДКМКЭ), предложенного в работах П.А. Акимова, А.Б. Золотова [14-19,30] и развитого в исследованиях П.А. Акимова [1-9,33-43], М.Л. Мозгалевой [1-8,26,27,34-36,38-41], Моджаба Аслами [2,3,23-25,34-36,38], О.А. Козырева [10,22] и О.А. Негрозова [2,3, 9,38-40,42,43].

1. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ И ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Пусть требуется решить многоточечную краевую задачу статического расчета (определить напряжения и перемещения) балки-стенки. Расчетная модель – двумерная (плоская) задача теории упругости. Математическая постановка двумерной задачи теории упругости приведена, например, в [28]. Пусть Ω – область, занимаемая рассматриваемой конструкцией,

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2 \}, \quad (1.1)$$

причем можно записать, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n_b-1} \Omega_k, \quad (1.2)$$

где

$$\Omega_k = \{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_{1,k}, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}; \quad (1.3)$$

$x_{2,k}^b, k=1, 2, \dots, n_b$ – координаты граничных точек (в общем случае $n_b > 2$ и имеем многоточечную краевую задачу); n_b – количество граничных точек; $\Omega_k, k=1, 2, \dots, n_b-1$ – подобласти области Ω .

Заметим, что $l_{1,k} = \text{const}$ при $x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b$, однако в общем случае $l_1 = l_1(x_2) \neq \text{const}$, т.е. допускается случай кусочного постоянства l_1 . Рассматривая задачу в рамках метода расширенной (стандартной) области А.Б. Золотова [13,20,37], можем окаймить области $\Omega_k, k=1, 2, \dots, n_b-1$ соответствующими расширенными $\omega_k, k=1, 2, \dots, n_b-1$ и перейти к расширенной области ω ,

$$\omega = \bigcup_{k=1}^{n_b-1} \omega_k, \quad (1.4)$$

где

$$\omega_k = \{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < \tilde{l}_{1,k}, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \} \supset \Omega_k, \quad (1.5)$$

причем можно выбрать

$$\tilde{l}_{1,k} = \tilde{l}_1 = \text{const}, k=1, 2, \dots, n_b-1, \text{ т.е.} \\ \omega_k = \{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < \tilde{l}_1, x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \} \supset \Omega_k. \quad (1.6)$$

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТИ

Пусть в пределах одной группы областей ω_k из числа указанных в (1.4) физико-геометрические параметры (характеристики) конструкции не зависят от переменной x_2 , отвечающей так называемому основному направлению – для таких областей целесообразно использовать дискретизацию в рамках ДКМКЭ (имеем дискретно-континуальную модель). Пусть в пределах другой группы областей ω_k соответствующие физико-геометрические параметры конструкции могут изменяться произвольно – для таких областей следует использовать дискретизацию в рамках МКЭ (имеем дискретную модель). Таким образом, целесообразно совместное применение МКЭ и ДКМКЭ.

Для удобства последующего изложения введем параметр ρ_k , называемый параметр дискретизации и принимающий следующие значения: $\rho_k = 1$ – используется дискретизация в рамках МКЭ [11,12,29,44-46]; $\rho_k = 2$ – используется дискретизация в рамках ДКМКЭ [1,14-19].

3. О ПРАВИЛАХ НУМЕРАЦИИ ПОДОБЛАСТЕЙ

Вообще, могут использоваться различные подходы к нумерации подобластей (или, что эквивалентно, областей), определяемых формулой (1.5).

Первый подход предусматривает отдельную нумерацию областей с различными типами дискретизации:

$$k_1 = k_1(k) = \sum_{s=1}^k |\rho_s - 2|;$$

$$k_2 = k_2(k) = \sum_{s=1}^k |\rho_s - 1|, \quad (3.1)$$

где k – исходный номер подобласти ω_k ; $k_1 = k_1(k)$ – соответствующий номер области с дискретизацией в рамках МКЭ или $k_2 = k_2(k)$ – соответствующий номер области с дискретизацией в рамках ДКМКЭ. Разумеется, также можно построить обратные зависимости

$$k = k(k_1); \quad k = k(k_2), \quad (3.2)$$

выполнив табуляцию результатов вычислений по формулам (3.1).

Таким образом, можем переписать (1.4) в следующем виде:

$$\omega = \bigcup_{k_1=1}^{N_{fe}} \omega_{k_1}^{fe} + \bigcup_{k_2=1}^{N_{dc}} \omega_{k_2}^{dc}, \quad (3.3)$$

причем справедливы соотношения

$$N_{fe} = \sum_{s=1}^{n_b-1} |\rho_s - 2|; \quad N_{dc} = \sum_{s=1}^{n_b-1} |\rho_s - 1|; \quad (3.4)$$

$$N_{fe} + N_{dc} = n_b - 1, \quad (3.5)$$

где $\omega_{k_1}^{fe}$, $k_1 = 1, 2, \dots, N_{fe}$ – области, в пределах которых используется дискретизация в рамках МКЭ; $\omega_{k_2}^{dc}$, $k_2 = 1, 2, \dots, N_{dc}$ – области, в пределах которых используется дискретизация в рамках ДКМКЭ.

Второй подход, напротив, основан на единой нумерации областей с различными типами дискретизации, т.е. на использовании представления вида (1.4), в котором

$$\omega_k = \begin{cases} \omega_k^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ \omega_k^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2. \end{cases} \quad (3.6)$$

В таком случае, очевидно, соответствующие пересчеты по формулам (3.1)-(3.2) не требуются. В настоящей статье далее будет использоваться именно второй подход.

4. О ПРАВИЛАХ НУМЕРАЦИИ КОНЕЧНЫХ И ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{fe} . Введем обозначение

$$l_{2,k}^{fe} = x_{2,k+1}^b - x_{2,k}^b, \text{ если } \rho_k = 1. \quad (4.1)$$

Пусть

$$x_{1,i}^{fe,k}, i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{fe} \text{ и } x_{2,j}^{fe,k}, j = 1, 2, \dots, N_{2,k}^{fe}$$

– координаты (соответственно по переменным x_1 и x_2) узлов конечных элементов в области ω_k^{fe} ; $(N_{1,k}^{fe} - 1)$ и $(N_{2,k}^{fe} - 1)$ – количество конечных элементов, на которые «разбивается» область ω_k^{fe} по направлениям, соответствующим переменным x_1 и x_2 (рассматривается прямоугольная аппроксимирующая сетка). Для узлов конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_k^{fe} будем применять трехиндексную систему нумерации: имеем номер типа (k, i, j) , где k – номер подобласти дискретизации в рамках МКЭ, i и j – соответственно номера элемента по при дискретизации вдоль направлений, соответствующих x_1 и x_2 ; $\omega_{k,i,j}^{fe}$ – обозначение соответствующего конечного элемента. Рассмотрим произвольную область ω_k^{dc} . Введем обозначение

$$l_{2,k}^{dc} = x_{2,k+1}^b - x_{2,k}^b, \text{ если } \rho_k = 2. \quad (4.2)$$

Пусть $x_{1,i}^{dc,k}, i = 1, 2, \dots, N_{1,k}^{dc}$ – координаты (по переменной x_1) узлов (узловых линий) дискретно-континуальных конечных элементов (ДККЭ) в области ω_k^{dc} ; $(N_{1,k}^{dc} - 1)$ – общее количество используемых дискретно-континуальных конечных элементов в области ω_k^{dc} . Для удобства алгоритмических по-

строений будем применять двухиндексную систему нумерации узлов дискретно-континуальных конечных элементов, используемых при дискретизации области ω_k^{dc} : имеем номер типа (k, i) , где k – номер подобласти, i – номер элемента по при дискретизации вдоль направления, соответствующего переменной x_1 ; $\omega_{k,i}^{dc}$ – обозначение соответствующего дискретно-континуального конечного элемента.

Примеры соответствующих обозначений показаны на рис. 4.1.

Для удобства последующего изложения можно ввести обозначения:

$$N_{1,k} = \begin{cases} N_{1,k}^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ N_{1,k}^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2; \end{cases} \quad N_{2,k} = N_{2,k}^{fe}, \text{ если } \rho_k = 1; \quad (4.3)$$

$$x_{1,k,i} = \begin{cases} x_{1,i}^{fe,k}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ x_{1,i}^{dc,k}, & \text{если } \rho_k = 2; \end{cases} \quad x_{2,k,j} = x_{2,j}^{fe,k}, \text{ если } \rho_k = 1; \quad (4.4)$$

$$l_{2,k} = \begin{cases} l_{2,k}^{fe}, & \text{если } \rho_k = 1 \\ l_{2,k}^{dc}, & \text{если } \rho_k = 2. \end{cases} \quad (4.5)$$

Заметим, что в простейших случаях схема дискретизации конструкции по направлению, отвечающему переменной x_1 , неизменна по всей области, т.е. справедливы равенства (в ходе дальнейшего изложения будем полагать, что эти равенства выполняются для рассматриваемого в настоящей статье случая (в противном случае приводимые далее выкладки существенно усложняются))

$$N_{1,k} = N_1, \quad k = 1, 2, \dots, n_b - 1; \quad (4.6)$$

$$x_{1,k,i} = x_{1,i}, \quad k = 1, 2, \dots, n_b - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (4.7)$$

Заметим, что при изложении аппроксимаций в рамках ДККЭ будем следовать системе обозначений, принятой в [1].

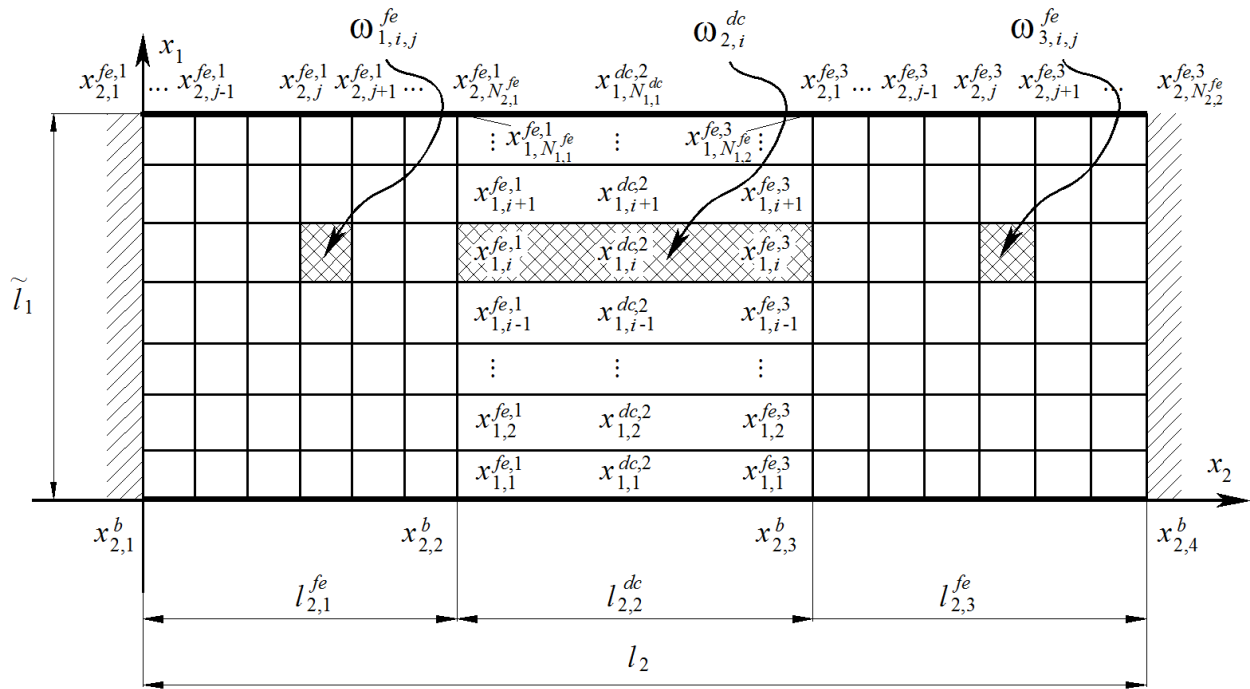


Рисунок 4.1. Пример к постановке трехточечной краевой задачи.

5. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ (КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ) АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ

Рассмотрим произвольную область ω_k^{fe} . Принимается следующая дискретная аппроксимирующая модель: по обоим координатным направлениям (вдоль осей Ox_1 и Ox_2) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_k^{fe} разбивается на конечные элементы (КЭ),

$$\omega_k^{fe} = \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \bigcup_{j=1}^{N_{2,k}-1} \omega_{k,i,j}^{fe};$$

$$\omega_{k,i,j}^{fe} = \{(x_1, x_2) : x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1},$$

$$x_{2,k,j} < x_2 < x_{2,k,j+1}\}, \quad (5.1)$$

определяя характеристическую функцию конечного элемента $\omega_{k,i,j}^{fe}$ по следующей формуле

$$\theta_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i,j}^{fe} \subset \Omega_k; \\ 0, & \omega_{k,i,j}^{fe} \not\subset \Omega_k. \end{cases} \quad (5.2)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе) определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i,j} = \theta_{k,i,j} \mu. \quad (5.3)$$

Основными неизвестными в узлах конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ (верхний индекс «(k)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{fe}$), т.е. для (k, i, j) -го узла это $u_1^{(k,i,j)}, u_2^{(k,i,j)}$.

Поля $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ по обоим координатным направлениям (вдоль осей Ox_1 и Ox_2) в пределах каждого конечного элемента аппроксимируются линейно (т.е. используются стандартные прямоугольные четырехузловые конечные элементы двумерной задачи теории упругости (в перемещениях) [12,29]).

Можно показать [12,29], что в рамках рассмотрения подобласти ω_k^{fe} , разрешающая система $2N_1N_{2,k}$ линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$K_k \bar{U}_k = \bar{R}_k, \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}_k = & [(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,1)})^T \quad \dots \\ & (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots \\ & (\bar{u}_n^{(k,1,N_{2,k})})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,N_{2,k})})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,N_{2,k})})^T]^T \end{aligned} \quad (5.5)$$

– $4N_1$ -мерный глобальный вектор неизвестных (нижний индекс «(k)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{fe}$);

$$\bar{u}_n^{(k,i,j)} = [u_1^{(k,i,j)} \quad u_2^{(k,i,j)}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_{2,k}; \quad (5.6)$$

K_k – глобальная матрица жесткости $2N_1N_{2,k}$ -го порядка; $\bar{R}_k$ – $2N_1N_{2,k}$ - мерный глобальный вектор правых частей (глобальный вектор нагрузок).

6. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ПОДОБЛАСТИ.

Рассмотрим произвольную область ω_k^{dc} . Принимается следующая дискретно-континуальная аппроксимирующая модель: по основному направлению (вдоль оси $0x_2$) решается континуальная задача, а по другому (вдоль оси $0x_1$) производится конечноэлементная аппроксимация. Таким образом, область ω_1 разбивается на дискретно-континуальные конечные элементы,

$$\begin{aligned} \omega_k^{dc} = & \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \omega_{k,i}^{dc}; \\ \omega_{k,i}^{dc} = & \{ (x_1, x_2) : x_{1,i} < x_1 < x_{1,i+1}, \\ & x_{2,k}^b < x_2 < x_{2,k+1}^b \}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

определяя характеристическую функцию дискретно-континуального конечного элемента (ДККЭ) $\omega_{k,i}^{dc}$ по следующей формуле

$$\theta_{k,i} = \begin{cases} 1, & \omega_{k,i}^{dc} \subset \Omega_k; \\ 0, & \omega_{k,i}^{dc} \not\subset \Omega_k. \end{cases} \quad (6.2)$$

Поэлементные функции, характеризующие свойства материала конструкции (параметры Ламе) определяются по формулам:

$$\bar{\lambda}_{k,i} = \theta_{k,i} \lambda; \quad \bar{\mu}_{k,i} = \theta_{k,i} \mu. \quad (6.3)$$

Основными неизвестными в узлах дискретно-континуальных конечных элементов являются составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}$ и их производные $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}$ по переменной x_2 (верхний индекс «(k)», следуя [1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{dc}$), т.е. для (k, i) -го узла это $u_1^{(k,i)}, u_2^{(k,i)}$ и $v_1^{(k,i)}, v_2^{(k,i)}$.

Поля $u_1^{(k,i)}, u_2^{(k,i)}$ и $v_1^{(k,i)}, v_2^{(k,i)}$ по неосновному направлению (вдоль x_1) в пределах каждого дискретно-континуального конечного элемента аппроксимируются линейно.

Можно показать [1], что в рамках рассмотрения подобласти ω_k^{dc} , разрешающая система $4N_1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид:

$$\bar{U}'_k(x_2) = A_k \bar{U}_k(x_2) + \bar{R}_k(x_2), \quad (6.4)$$

$$\text{где } \bar{U}_k = \bar{U}_k(x_2) = [(\bar{u}_k)^T \quad (\bar{v}_k)^T]^T \quad (6.5)$$

– $4N_1$ -мерная глобальная вектор-функция неизвестных (нижний индекс «(k)», следуя

[1], здесь и далее соответствует номеру рассматриваемой подобласти, т.е. $\omega_k = \omega_k^{dc}$;

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k(x_2) = [(\bar{u}_n^{(k,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1)})^T]^T; \quad (6.6)$$

$$\bar{v}_k = \bar{v}_k(x_2) = [(\bar{v}_n^{(k,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_1)})^T]^T; \quad (6.7)$$

$$\bar{u}_n^{(k,i)} = \bar{u}_n^{(k,i)}(x_2) = [u_1^{(k,i)} \quad u_2^{(k,i)}]^T; \\ \bar{v}_n^{(k,i)} = \bar{v}_n^{(k,i)}(x_2) = [v_1^{(k,i)} \quad v_2^{(k,i)}]^T; \quad (6.8)$$

A_k – матрица коэффициентов $4N_1$ -го порядка; $\bar{R}_k(x_2)$ – $4N_1$ -мерная вектор-функция правых частей.

Решение системы (6.4) может быть представлено в виде [1]:

$$\bar{U}_k(x_2) = E_k(x_2)\bar{C}_k + \bar{S}_k(x_2), \quad (6.9)$$

где $E_k(x_2) = \varepsilon_k(x_2 - x_{2,k}^b) - \varepsilon_k(x_2 - x_{2,k+1}^b)$;

$$\bar{S}_k(x_2) = \varepsilon_k(x_2) * \bar{R}_k(x_2); \quad (6.10)$$

$\varepsilon_k(x_2)$ – фундаментальная матрица-функция системы (6.4), определяемая согласно [1,26]; символ «*» здесь и далее обозначает операцию свертки функций [21,31,32]; $\bar{C}_k$ – $4N_1$ -мерный вектор постоянных, определяемый из соответствующих граничных условий.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе

совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с кусочно-постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 33-45.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А., Щербина С.В.** О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов для задач статического расчета балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами вдоль основного направления. Сопоставления с программным комплексом ANSYS Mechanical. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 18-32.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении

- трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 1: Дискретно-континуальная постановка задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 44-63.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Некоторые алгоритмические особенности, связанные с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток при численном решении трехмерных краевых задач расчета конструкций в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов. Часть 2: Алгоритм задания стандартных типов граничных условий. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 4, 2013, pp. 64-82.
 6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 1: Континуальные постановки задачи. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 51-55.
 7. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 2: Численная реализация метода. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и*
 - строительных конструкций, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 56-79.
 8. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Об одном корректном варианте реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для решения задач статического расчета балок-стенок. Часть 3: Программная реализация и примеры расчетов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 9, Issue 2, 2013, pp. 80-97.
 9. **Акимов П.А., Негрозов О.А.** Об одном примере расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 11, Issue 4, 2015, pp. 14-28.
 10. **Акимов П.А., Сидоров В.Н., Козырев О.А.** Определение собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики на основе дискретно-континуального метода конечных элементов. // *Вестник МГСУ*, №3, 2009, с. 255-259.
 11. **Белостоцкий А.М.** Численное моделирование статического и динамического напряженно-деформированного состояния пространственных систем «сооружение – основание – водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия – закрытия швов и макротрещин. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.07 «Гидротехническое и мелиоративное строительство». – М.: МГУП, 1998. – 367 с.
 12. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.

13. **Золотов А.Б.** Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика». – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. – 284 с.
14. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
15. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.
16. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
17. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
18. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
19. **Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.** Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
20. **Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.** Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. – М.: МИСИ, 1992. – 86 с.
21. **Кеч В., Теодореску П.** Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 520 с.
22. **Козырев О.А.** Определение собственных значений и собственных функций краевых задач строительной механики на основе развития дискретно-континуального метода конечных элементов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика». – М.: МГСУ, 2009. – 200 с.
23. **Моджтаба Аслами.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные подходы к локальному расчету строительных конструкций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». – М.: НИУ МГСУ, 2015. – 321 с.
24. **Моджтаба Аслами, Акимов П.А., Мсхалая Ж.И.** К вопросу о верификации многоуровневых подходов к локальному расчету строительных конструкций. Часть 1: Дискретный (численный) подход. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 41-60.
25. **Моджтаба Аслами, Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кайтуков Т.Б.** К вопросу о верификации многоуровневых подходов к локальному расчету строительных конструкций Часть 2: Дискретно-континуальный (численно-аналитический) подход. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 12, Issue 4, 2016, pp. 61-79.
26. **Мозгалева М.Л.** Дискретные и дискретно-континуальные методы много-

- уровневого расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика». – М.: НИУ МГСУ, 2015. – 489 с.
27. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Кайтуков Т.Б.** О некоторых особенностях реализации корректного метода точного аналитического решения двухточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, Volume 10, Issue 1, 2014, pp. 120-122.
 28. **Партон В.З., Перлин П.И.** Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
 29. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
 30. **Сидоров В.Н., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий, сооружений. // *Известия ВУЗов. Строительство*, №10, 2004, с. 8-14.
 31. **Шварц Л.** Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412 с.
 32. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
 33. **Akimov P.A.** Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // *Applied Mechanics and Materials* Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
 34. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L., Mskhalaya Z.I.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 1: Mathematical Foundations. // *MATEC Web Conferences*, Vol. 86 (2016) 8 pages.
 35. **Akimov P.A., Aslami M., Mozgaleva M.L.** Semianalytical Analysis of Shear Walls with the Use of Discrete-Continual Finite Element Method. Part 2: Numerical Examples, Future Development. // *MATEC Web Conferences*, Vol. 86 (2016) 8 pages.
 36. **Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // *Advanced Materials Research* Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
 37. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L.** Method of Extended Domain and General Principles of Mesh Approximation for Boundary Problems of Structural Analysis. // *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 580-583 (2014), pp. 2898-2902.
 38. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 1: Two-Dimensional Problems // *Procedia Engineering*, Vol. 91 (2014), pp. 2-7.
 39. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 1: Deep Beam with Constant Physical and Geometrical Parameters Along Basic Direction. // *Advanced Materials Research*, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 89-94.
 40. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Negrozov O.A.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method for Two-Dimensional Problems of Structural Analysis. Part 2: Deep Beam with Piecewise Constant Physical and Geometrical

- Parameters Along Basic Direction. // *Advanced Materials Research*, Vols. 1025-1026 (2014), pp. 95-103.
41. **Akimov P.A., Mozgaleva M.L., Sidorov V.N.** About Verification of Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. Part 2: Three-Dimensional Problems // *Procedia Engineering*, Vol. 91 (2014), pp.14-19.
42. **Akimov P.A., Negrozov O.A.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 1: Two-Dimensional Theory of Elasticity. // *Procedia Engineering*, Vol. 153 (2016) pp. 8-15.
43. **Negrozov O.A., Akimov P.A., Lantsova I.Yu.** Semianalytical Structural Analysis Based on Combined Application of Finite Element Method and Discrete-continual Finite Element Method Part 4: Verification Samples. // *Procedia Engineering*, Vol. 153 (2016) pp. 926-932.
44. **Zienkiewicz O.C., Morgan K.** *Finite Elements and Approximation*. Dover Publications, 2006, 352 pages.
45. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Volume 2. Butterworth-Heinemann, 2005, 736 pages.
46. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005, 752 pages.
- хитектурный институт (государственная академия), кафедра высшей математики и строительной механики; Российский университет дружбы народов; 107031, Россия, г. Москва, ул. Рождественка, дом 11/4, корп. 1, стр. 4; E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел/факс: +7 (499) 183-59-94; email: NegrozovOA@mgsu.ru.
- Pavel A. Akimov, Corresponding Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, PhD, Professor, Chief Scientific Secretary of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; StaDyO Research & Engineering Center; Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering; 24, Ul. Bolshaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; phone +7(495) 625-71-63; fax: +7 (495) 650-27-31; E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.
- Vladimir N. Sidorov, Professor, Dr.Sc., Department of Advanced Mathematics and Structural Mechanics; Moscow Institute of Architecture (State Academy); The Peoples' Friendship University of Russia; 11/4, Building 4, Ulitsa Rozhdestvenka, Moscow, 107031, Russia; E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com.
- Oleg A. Negrozov, PhD Student, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russia, phone/fax: +7(499) 183-59-94, E-mail: NegrozovOA@mgsu.ru

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук; главный ученый секретарь РААСН; заместитель генерального директора по науке ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ); 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1; тел. +7(495) 625-71-63; факс +7 (495) 650-27-31; E-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com.

Сидоров Владимир Николаевич, советник РААСН, профессор, доктор технических наук, Московский ар-

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСИЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ КОМПОЗИТНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ «ЛИРА-САПР»

М.С. Барабаш^{1,2}, А.В. Пикуль^{2,3}, О.Ю. Башинская^{1,2}

¹ Национальный авиационный университет, г. Киев, УКРАИНА

² ООО «ЛИРА САПР», г. Киев, УКРАИНА

³ Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, УКРАИНА

Аннотация: В статье предложена методика моделирования усиления конструкций композитными материалами в программном комплексе "ЛИРА-САПР". Приводится пример осуществления проверки несущей способности усиленных элементов конструкций в программе ЭСПРИ. Предложен алгоритм расчёта конструктивной системы для определения реальной несущей способности при изменении проектной ситуации с учётом включения в работу конструкции элементов усиления. Алгоритм заключается в последовательном математическом моделировании и анализе напряженно-деформированного состояния конструкции при изменении проектной ситуации. Алгоритм состоит из следующих этапов: статический расчёт конструкции, подбор армирования; определение элементов, которые могут подвергнуться разрушению (физически-нелинейная постановка задачи); определение несущей способности усиленных элементов (в ЭСПРИ); расчет выбранных элементов с учетом усиления; общий расчет и анализ конструктивной системы с измененными жесткостными характеристиками сечений в результате усиления. Рассмотрен процесс моделирования усиления конструкций при помощи классических методов, а именно усиление металлической облойкой. Рассмотрен пример численного моделирования усиления рамной конструкции, с подбором и проверкой композитного материала. С использованием метода конечных элементов была построена математическая модель рамной конструкции. В работе рамы учитывалось наличие усиления некоторых стержневых элементов композитными материалами. Произведено сравнение кинематических характеристик и усилий, которые возникли в расчётной модели рамы при статическом расчете, при расчёте с учётом физической нелинейности и при усилении некоторых элементов конструкции углепластиком. Также в работе описан метод моделирования усиления конструкции металлической облойкой. Расчет усиленного элемента производится в программе ЭСПРИ, с последующим анализом работы общей расчетной модели в ПК «ЛИРА-САПР». Результатом работы является сравнение и анализ напряженно-деформированного состояния рассматриваемой расчетной модели при различных вариантах постановки задачи. Результаты работы могут быть использованы для широкого применения при исследовании методов повышения несущей способности зданий и сооружений.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, композитные материалы, деформации, физическая нелинейность, компьютерное моделирование, ПК «ЛИРА-САПР».

THE MODELING OF STRUCTURAL ENFORCEMENT BY COMPOSITE MATERIALS ON "LIRA-SAPR"

Maria S. Barabash^{1,2}, Anatol V. Pikul^{2,3}, Olha U. Bashynska^{1,2}

¹ National Aviation University, Kiev, UKRAINE

² ООО "LIRA SAPR", Kiev, UKRAINE

³ Kyiv National University of Construction and Architecture, Kiev, UKRAINE

Abstract: This paper provides detailed suggestions for process of modeling the structural reinforcement by composite materials on the software package "LIRA-SAPR". It provides the implementation of bearing capacity checks for reinforced elements on the program called "ESPRI". The article offers an algorithm for calculation the construction objects in case of the changing of design situation, taking into account the modeling of the composite structure reinforcement. It considers the modeling process of reinforcement of structures using classical methods, such as using of metal casing. In the article you can also find a numerical modeling example of the

frame structure reinforcement, with the selection and verification of the composite material. It considered the process of modeling the bearing capacity increasing with using the classical methods, namely the increase of the metal hooping. The article investigates the example of a numerical simulation of the frame bearing capacity increasing with the selection and verification of the composite material. Using the finite element method a mathematical model of the frame structure was constructed. In the frame work it was taken into account the occurrence of the bearing capacity increasing by composite materials in some elements. It compared the kinematic characteristics and effort that have arisen within the frame design model with static analysis, also taking into account physical nonlinearity in the calculation and enhancing certain elements reinforced with composite material. Also in this paper we describe a method of modeling the bearing capacity increasing with using the metal hooping. The calculation of reinforced element is made on the program called ESPRI, followed by an analysis of the overall calculation model work on the software package "LIRA-SAPR". The result of the article is a comparison and analysis of the stress-strain state of the considered computational model for various problem formulations. The results could be used for wider application in the study of methods for increasing the bearing capacity of buildings and structures.

Key words: stress-strain state, composite material, strains, deformations, material nonlinearity, computer modelling software «LIRA-SAPR»

ВВЕДЕНИЕ

На эксплуатационной стадии жизненного цикла возникает изменение нагрузок, изменение характеристик материалов, в связи с реологией и возможным развитием трещин. Вопрос о повышении несущей способности конструкций зданий и сооружений путем их усиления является актуальным. Одним из наиболее эффективных методов усиления железобетонных конструкций является использование композитных материалов (ламинатов, а также других изделий на основе углеродного (или стеклянного) волокна).

Анализ публикаций:

В связи с постоянным увеличением интереса к композитным материалам и композитным конструкциям, а также актуальностью их использования, развитию этого вопроса было посвящено много работ Стороженко Л.И. [3, 4], Гвоздева А.А., Ключева С.В., Курлапова Д.В. [12], Хаютина Ю.Г. [14], Чернявского В.Л. [15] и других. Развитию методик расчёта железобетонных конструкций, усиленных композитными материалами посвящены работы Кузнецова В.Д., Ватина Н.И. [9], Григорьева Я.В. и других. Эти вопросы также рассматривались и в работах зарубежных ученых. Например, в работах Belarbia A. [17], Acunb B., David D. [18], Grace N.F. [20] и других.

Анализ работ показал, что на сегодняшний день существует большое количество экспериментальных исследований в этом направлении. Вопросы численного моделирования усиленной конструкции и анализ её напряженно-деформированного состояния (НДС) остаются открытыми.

Постановка задачи.

Целью статьи является математическое моделирование рамной конструкции методом конечных элементов (МКЭ), с учётом работы системы усиления конструкции композитными материалами. А также создание алгоритма компьютерного моделирования работы конструкции до и после усиления. Реализация поставленной задачи проводилась на основе программного комплекса «ЛИРА-САПР» и электронного справочника инженера «ЭСПРИ».

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Композитные материалы на основе фибры (волокон), применяемые при усилении строительных конструкций, изготавливаются из микроволокон, которые омоноличивают в полимере и тем самым соединяют их в единое целое. Наиболее распространённые типы волокон: арамидные, углеродные и стеклово-

локна. Физико-механические свойства композитных материалов определяются типом и количеством применяемых волокон. Обеспечение несущей способности и устойчивости любой конструкции обосновывается на основе численного и компьютерного анализа НДС.

Рассмотрим методику расчёта конструкции в ПК «ЛИРА-САПР» с учётом повышения несущей способности её элементов путем усиления композитными материалами.

Для определения реального НДС исследуемого объекта, с целью принятия решения о дальнейшей его эксплуатации или о реконструкции, выполняется расчет с учетом изменившихся нагрузок, пониженных жесткостей, изменения конструктивной системы. Расчет целесообразно выполнить, используя метод «инженерной нелинейности» ПК ЛИРА-САПР. После подбора армирования для железобетонных элементов, выполняется расчет конструкции с учётом физической нелинейности, с учетом подобранной арматуры. В результате расчета по приведенной методике определяются поврежденные элементы конструкции, в которых возникают трещины, следовательно, элементы, которые нуждаются в усилении.

На следующем этапе подбираются параметры композитного материала, которым будут усиливать конструкцию. Несущая способность усиленного элемента проверяется в ЭСПРИ. В результате проверки, в ЭСПРИ получаем новую приведенную жесткость усиленного элемента.

После подбора композитного материала и проверки несущей способности усиленного элемента, в ПК «ЛИРА-САПР» задается новая жесткость конечным элементам расчётной схемы. Для этого в элементах, которые необходимо усилить, изменяется тип конечного элемента на физически-нелинейный универсальный пространственный стретчевый КЭ №210. После задания новой жесткости (с учётом усиления конструкции композитными материалами) производится новый расчёт. В результате оценки полученного НДС расчётной модели в целом, принимает-

ся решение о дополнительном усилении оставшихся элементов конструкции.

В расчетной схеме возникает перераспределение усилий, после чего, при желании, в ЭСПРИ можно произвести повторную проверку несущей способности усиленных элементов конструкции, уже с новыми, полученными в ПК «ЛИРА-САПР» усилиями в этих элементах.

Таким образом, процедуру расчета аналитической модели в ПК «ЛИРА-САПР» и ЭСПРИ с учетом усиления можно представить в виде алгоритма (рисунок 1).

Рассмотрим процедуру получения параметров для моделирования усиления конструкции в ПК «ЛИРА-САПР» на примере расчётной модели рамы (рисунок 2).

После статического расчета для рассматриваемой расчётной модели было подобрано соответствующее армирование. После этого был произведен расчет с учетом физической нелинейности, в котором были заданы соответствующие параметры деформирования бетона и арматуры. Также были заданы параметры для расчёта деформации конструкции с учётом ползучести. Изменение коэффициента ползучести во времени было задано при помощи 44-го кусочно-линейного закона ползучести. При этом коэффициент ползучести $\varphi(\tau)$ был рассчитан по формулам:

$$\varphi(\tau) = \varphi(t') f(t - t'), \quad (1)$$

$$\varphi(t') = C_0 + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(t')^k}, \quad (2)$$

$$f(t - t') = \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k(t-t')}, \quad (3)$$

где t – момент времени, для которого определяется деформация; t' – момент приложения элементарного приращения напряжения; B_k и γ_k – постоянные, подобранные надлежащим образом для принятого материала, при этом

$$B_0 = 1, \gamma_0 = 0 \text{ и } \gamma_k > 0.$$

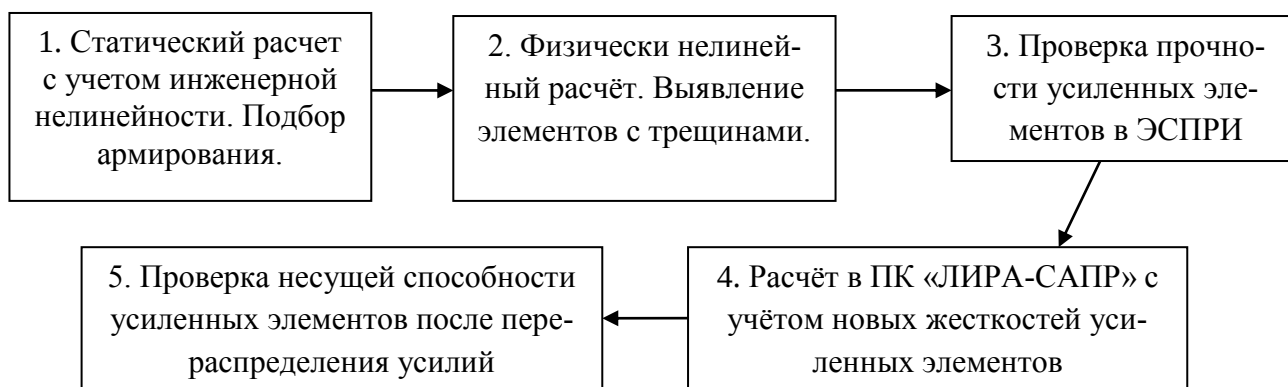


Рисунок 1. Алгоритм расчёта усиления конструкции в ПК «ЛИРА-САПР».

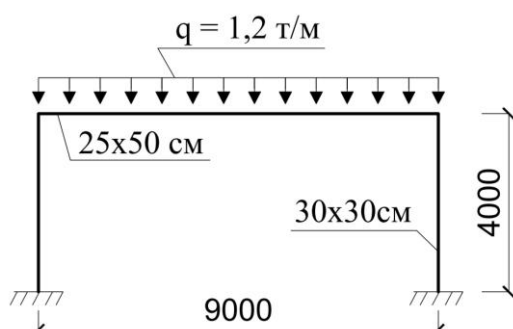


Рисунок 2. Расчётная схема рамы.

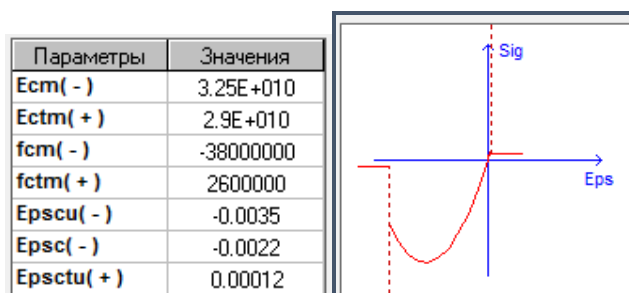


Рисунок 3. Параметры нелинейного деформирования бетона, Па.

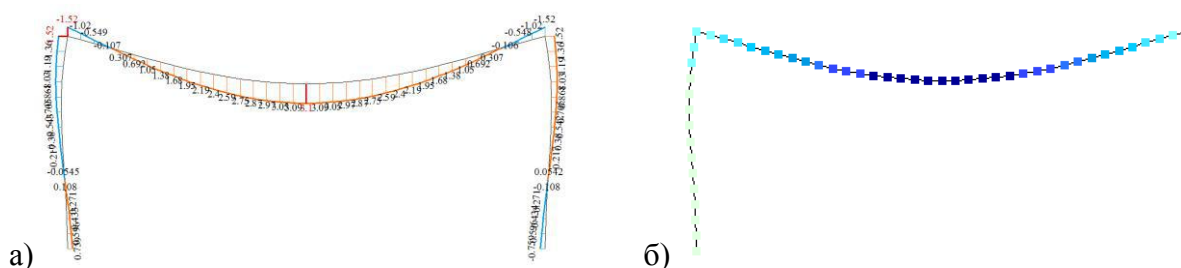


Рисунок 4. Схемы НДС: а) деформированная схема; б) мозаика перемещений.

Величина C_0 – это предельное значение меры ползучести; A_k – некоторый параметр, который зависит от свойств и условий старения для принятого материала.

После расчета с учётом физической нелинейности были получены схемы НДС тестовой рамы (рисунок 4).

В результате расчета было определено, что на 3 стадии проявления деформаций ползучести в некоторых элементах схемы возникают трещины. На рисунке 5 показаны диаграммы напряжений и деформаций в поперечных сечениях балки и колонн, до появления трещин и после.

Для усиления элементов рамы, в которых возникли трещины был подобран композитный материал марки Aslan 400 CFRP Laminate с жесткостными характеристиками:

- толщина монослоя: 1,4 мм;
- модуль упругости, E : 131000 МПа;
- деформация при разрыве: 0.0187 %.
- прочность материала на растяжение: 2400 МПа;

Коэффициент условий работы принимался равным единице. После подбора композитного материала для усиления, в ЭСПРИ была произведена проверка несущей способности усиленного элемента рамы.

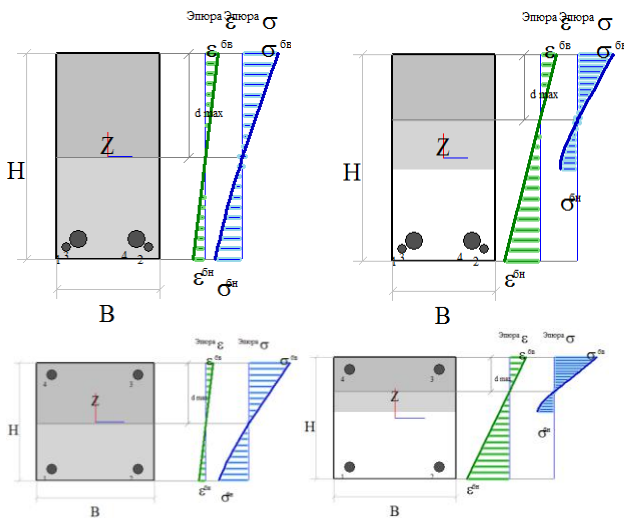


Рисунок 5. Диаграммы напряжений и деформаций поперечных сечений схемы.

Для усиленных элементов, которые работают на сжатие, проверка несущей способности осуществляется по формулам:

- при усилении внешним армированием в продольном направлении:

$$N_e \leq R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A_s' (h_0 - a') + R_f A_f a' \quad (4)$$

- при усилении внешним армированием в поперечном направлении:

$$N_e \leq R_{b3} b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A_s' (h_0 - a'). \quad (5)$$

Для элементов, что работают на изгиб, проверка осуществляется по продольному изгибающему моменту:

- для прямоугольного сечения:

$$M \leq R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A_s' (h_0 - a') + R_f A_f a' \quad (6)$$

- для таврового сечения, если граница проходит в ребре:

$$M \leq R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_b (b_f' - b) h_f' (h_0 - 0,5h_f') + R_{sc} A_s' (h_0 - a') + R_f A_f a' \quad (7)$$

После подбора материала для усиления, и проверки усиленных элементов конструкции, была получена приведенная жесткость усиленных элементов. Для расчёта компьютерной модели с учетом новых жесткостей и расчета с учетом физической нелинейности, КЭ №10 заменяется на КЭ №210, и элементам присваиваются новые приведенные жесткостные характеристики.

Одним из самых распространенных классических вариантов повышения несущей способности конструкции есть увеличение её жесткости, путём установки металлической обоймы. Рассмотрим пример расчета усиления колонн данной рамной конструкции при помощи устройства металлических обойм. Для этого нужно вместо подбора композитных материалов подобрать размеры металлических уголков (или пластинок), которыми необходимо усилить элементы конструкции. Проверку усиленных элементов можно также осуществить в программе «ЭСПРИ». Для этого в подпрограмме «Проверка сечений сталебетонных колонн» (раздел Железобетонные конструкции) выбирается параметр проверки сталебетонного сечения с металлическими уголками и задаются параметры уголков таким образом, чтобы они моделировали металлическую обойму вокруг колонны.

Проверку композитных сечений можно осуществлять по предельным состояниям и деформационной модели, а также по двухлинейной и трёхлинейной диаграммам деформирования.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В таблице 1 приводятся результаты сравнительного анализа НДС в элементах рамы (с учетом моделирования усиления) на различных этапах расчета.

Таблица 1. Сравнение усилий и перемещений рамы при различных постановках задачи.

	Линейно-упругий расчет		Физическая нелинейность		С учетом усиления	
	Перемещение Z, мм	Усилия M_y , т*м	Перемещение Z, мм	Усилия M_y , т*м	Перемещение Z, мм	Усилия M_y , т*м
Колонна	0	$\pm 1,65$	-0,1	$\pm 1,89$	0	$\pm 2,06$
Балка	-2,8	2,96	-7,6	2,7	-7,3	2,26

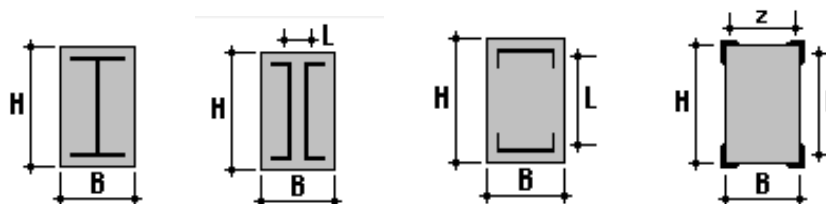


Рисунок 7. Типы поперечных сечений сталебетонных конструкций для расчета в ЭСПРИ.

Наблюдаются следующие изменения кинематических характеристик расчетной модели рамы: величина перемещений вдоль оси Z (при усилении рамы композитным материалом) меньше чем при расчете с учетом физической нелинейности, потому что композитные материалы повышают жесткость конструкции, тем самым уменьшая её деформации. Но значения кинематических характеристик с учетом усиления больше, чем при статическом расчете, поскольку расчет с использованием КЭ №210 (при учёте новых жесткостей) является также физически нелинейным, а значит более точно может моделировать изменение НДС конструкции.

После усиления конструкции углеволокном или какими-либо другими способами, в усиленных элементах происходит изменение жесткостных характеристик, следовательно, при расчете с учетом новых жесткостей, между конечными элементами происходит перераспределение усилий. Согласно дифференциальному уравнению упругой линии балки (8) известно, что значения моментов, которые возникают в конструкции, зависят от приведенной жесткости сечения. Следовательно, в результате повышения приведенной жесткости, на усиленные конечные элементы приходится большее значение изгибающих усилий, чем при обычном физически нелинейном расчёте.

$$M(x) = EI_x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \quad (8)$$

Также, в программе «ЭСПРИ» можно производить расчет и других сечений сталебетонных конструкций, пример которых показан на рисунке 7.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование композитных материалов для усиления конструкций позволяет значительно повысить несущую способность элементов зданий и сооружений, а также продлить их сроки эксплуатации, предотвратить или устранить аварийную ситуацию, устранить ошибки или проектирования, а главное – обеспечить надежную эксплуатацию и долговечность конструкции в целом.

Математические модели расчётных схем с учётом усиления реализованы в ПК «ЛИРА-САПР». В работе предложена методика моделирования усиления конструкции композитными материалами, а также рассмотрен вариант моделирования усиления конструкции металлической облойкой. Получены величины НДС элементов расчётной модели. Результатом исследования является оценка НДС конструкции при моделировании ее

усиления композитными материалами в физически нелинейной постановке задачи. Результаты данной работы могут быть использованы для широкого применения при компьютерном моделировании конструктивных систем, усиленных композитными материалами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция. СНиП 52-01-2003. – М.: ФАУ «ФЦС», 2012. – 155 с.
2. **Чернявский В.Л., Хаютин Ю.Г.** Руководство по усилению железобетонных конструкций композитными материалами. – М.: НИИЖБ, 2006. – 48 с.
3. **Шилин А.А., Пшеничный В.А., Каргузов Д.М.** Внешнее армирование железобетонных конструкций композитными материалами. – М.: Стройиздат, 2007. – 184 с.
4. **Барабаш М.С.** Компьютерное моделирование процессов жизненного цикла объектов строительства. – К.: Сталь, 2014. – 301 с.
5. **Бокарев С.А., Смердов Д.Н.** Нелинейный анализ железобетонных изгибаемых конструкций, усиленных композитными материалами. // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета, Вып. 46, 2010, с. 113-125.
6. **Ватин Н.Н., Дьячкова А.А.** Усиление железобетонных конструкций с использованием композиционных материалов на основе углеродных волокон и постнапрягаемых стержней. // Бетон и железобетон, Вып. 74, 2009, с. 20-21.
7. **Глинский В.В., Ионин В.Г.** Статический анализ. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Сибирское соглашение, 2002. – 241 с.
8. **Карпенко Н.И., Круглов В.М., Соловьев Л.Ю.** Нелинейное деформиро-
9. **Курлапов Д.В.** Усиление железобетонных конструкций с применением полимерных композитов. // Инженерно-строительный журнал, Вып. 28, 2009, с. 22-24.
10. **Смердов М.Н., Селиванова Е.О.** Отечественный опыт экспериментальных исследований долговечности железобетонных элементов, усиленных полимерными композиционными материалами. Инновационный транспорт, №2, 2005, с. 60-63.
11. **Хаютин Ю.Г., Чернявский В.Л., Аксельрод Е.З.** Применение углепластиков для усиления строительных конструкций. // Бетон и железобетон, Вып. 63, 2001, с. 17-20.
12. **Чернявский В.Д., Аксельрод Е.З.** Применение углепластиков для усиления железобетонных конструкций промышленных зданий. // Промышленное и гражданское строительство, №3, 2004, с. 37-38.
13. **Шевцов Д.А., Гвоздева А.А.** Усиление железобетонных конструкций композитными материалами. // Промышленное гражданское строительство, №8, 2014, с. 61-64.
14. **Belarbia A., Acunb B.** FRP Systems in Shear Strengthening of Reinforced Concrete Structures // Procedia Engineering, Vol. 57, 2013, pp. 2-8.
15. **David E., Djelal C.** Repair and strengthening of reinforced concrete beams using composite 7th Int. conf. on Struct // Faults and Repair, Vol. 2, 1997, pp. 169-173.
16. **Ehasani M.R.** Design recommendation for bond of GFRP rebar to concrete // Journal of Structural Engineering, 1996, Vol. 3(102), pp. 125-130.
17. **Grace N.F.** Strengthening of concrete beams using innovative ductile fiber – fiber reinforced polymer fabric // ACI Structural Journal. № 5(99), 2002, pp. 692-700.

Барабаш Мария Сергеевна, доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры компьютерных технологий строительства, Национальный авиационный университет; директор ООО «ЛИРА САПР»; Украина, г. Киев, Кияновский пер., д. 7а; тел. +380952863990; E-mail: bmari.lira@gmail.com; bmari@ukr.net.

Пикуль Анатолий Владимирович, ассистент кафедры металлических и деревянных конструкций, Киевский национальный университет строительства и архитектуры; инженер-аналитик программного обеспечения ООО «ЛИРА САПР»; Украина, г. Киев, Кияновский пер., д. 7а; тел. +380972176879; E-mail: Anatol.Pikul@gmail.com.

Башинская Ольга Юрьевна, аспирант, ассистент кафедры компьютерных технологий строительства, Национальный авиационный университет; инженер-программист ООО «ЛИРА САПР»; Украина, г. Киев, Кияновский пер., д. 7а; тел. +380631082201; E-mail: olchik@ukr.net.

Maria S. Barabash, Prof. Dr.Sc.; Professor of Department of Computational Technologies in Construction; National Aviation University; Director of ООО “LIRA SAPR”; Kosmonavta Komarova 1, Kyiv, Ukraine, 03058; phone +380952863990; E-mail: bmari.lira@gmail.com; bmari@ukr.net.

Anatol V. Pikul, Assistant of Department of Steel and Timber Structures; National University of construction and architecture; Software analytical engineer of ООО “LIRA SAPR”; Kiev, Povitroflotsky Avenue, 31, 03680; Phone +380972176879; E-mail: Anatol.Pikul@gmail.com.

Olha U. Bashynska, Ph.D. Student, Assistant of Department of Computational Technologies in Construction; National Aviation University; Software development engineer of ООО “LIRA SAPR”; Kosmonavta Komarova 1, Kyiv, Ukraine, 03058; Phone +380631082201; E-mail: olchik@ukr.net.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ ИЗ КАМЕННОЙ КЛАДКИ

А.И. Бедов¹, А.И. Габитов², А.А. Галлямов², А.С. Салов², А.М. Гайсин²

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

² Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, РОССИЯ

Аннотация: Рассмотрены результаты исследований по анализу напряженно-деформированного состояния конструкций несущих стен из высокопустотных керамических изделий. Представлен способ моделирования каменной кладки методом конечных элементов. Выполнены экспериментальные исследования конструкций кладок из производимых в Республике Башкортостан высокопустотных керамических изделий, установлен характер их работы под нагрузкой, предложен механизм разрушения. Приведены результаты сравнительной оценки расчетов в программном комплексе и традиционного «ручного» расчета.

Ключевые слова: высокопустотные керамические изделия, теплотехнический расчет, метод конечных элементов, напряженно-деформативное состояние, каменные здания, энергоэффективность, модель.

APPLICATION OF COMPUTER SIMULATION IN THE EVALUATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF LOAD-BEARING STRUCTURES OF BUILDINGS MASONRY

*Anatoliy I. Bedov¹, Azat I. Gabitov², Azat A. Gallyamov², Aleksandr S. Salov²,
Askar M. Gaisin²*

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

² Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, RUSSIA

Abstract: The results of studies on the analysis of the stress-strain state of the structures of bearing walls of high-hollow pottery. The way of modeling masonry finite element method. The experimental study of masonry structures produced in the Republic of Bashkortostan high-hollow pottery, set the nature of their work load, the mechanism of destruction. The results of the comparative evaluation of the calculations in the software package and the traditional “manual” calculation.

Key words: high-hollow ceramic products, Thermal calculation, finite element method, stress-deformability of the state, stone buildings, energy efficiency, the model.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящее время строительная отрасль в России динамично развивается. Активно применяются новые строительные материалы и технологии. В связи с направленностью

на энерго- и ресурсосбережение они совершенствуются в сторону снижения энергозатратности промышленных производств и повышения энергоэффективности материалов и конструкций. Возросшие требования к теплозащитным свойствам наружных стен зданий привели к расширению номенклатуры

эффективных изделий, в том числе и керамических. Улучшения теплозащитных качеств можно достигнуть повышением материалоемкости стен с увеличением их толщины [1-4] в 2-3 раза для обеспечения требований нормативной документации. Поэтому одним из оптимальных вариантов сокращения расходов тепла и защиты окружающей среды от лишних промышленных выбросов является повышение термического сопротивления наружных стен за счет производства керамических изделий со сниженной средней плотностью [5,6].

2. ИСПЫТАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ

На базе научно-образовательного центра инновационных технологий Архитектурно-строительного института Уфимского государственного нефтяного технического университета были проведены экспериментальные исследования физико-механических свойств керамического крупноформатного пустотелого камня с прямоугольными пустотами Porikam™, выпускаемого на кирпичном заводе «Амстрон» Аургазинского района Республики Башкортостан [5]. Вид камня приведен на рис. 1.



Рисунок 1. Трещинообразование образца.

В 1950-е годы Л.И. Онищик, стремясь объяснить упругие и механические свойства пустотелого кирпича, предложил рабочую модель кирпича пустотностью 25%. На рис. 2 показана рабочая модель структуры строи-

тельной керамики, отражающая механическую структуру кирпича.

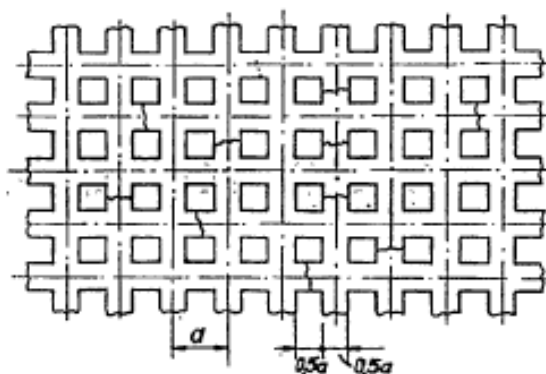


Рисунок 2. Рабочая модель структуры строительной тонкостенной керамики (пустотность 25%) Л.И. Онищика.

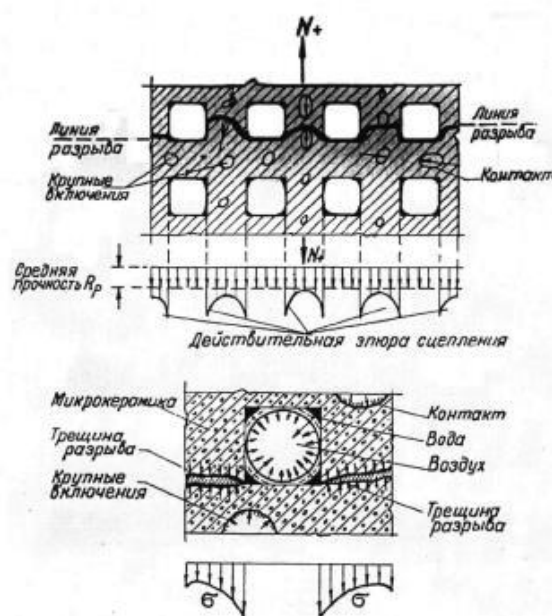


Рисунок 3. Рабочая модель структуры строительной тонкостенной керамики И.А. Рохлина.

И.А. Рохлин в 1940-50-е годы провел экспериментальные исследования элементов сборных армокерамических перекрытий, установил влияние температурно-влажностного состояния на прочность керамики, исследовал прочность, деформативность, усталость и ударную вязкость изделий из керамики. Он также предложил рабочую

модель структуры строительной керамики, основывавшуюся на модели Л.И.Онищика (рис. 3). Анализ проведенных испытаний показал, что от формы, характера и взаимного расположения составляющих керамики зависят ее механические свойства, а для получения полных результатов по прочности изделия необходимо определение прочности по всем трем направлениям [7,8].

3. ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

Сложность моделирования заключается в том, что каменная кладка является монолитным неоднородным упругопластическим материалом. Даже при равномерном распределении нагрузки по всему сечению сжатого элемента камень и раствор в кладке находятся в условиях сложного напряженного состояния. Они одновременно подвержены внецентренному сжатию, изгибу, растяжению, срезу и смятию [9, 10].

Моделирование кладки как кусочно-однородной среды выполняется на основе структурного (дискретного) моделирования с использованием критериев прочности материалов базовых элементов, определенных механизмов разрушения внутренних связей между базовыми элементами и соответствующих им критериев прочности связей. Структурный подход представляет собой концепцию разработки моделей, основанных на внутренней структуре объекта, что позволяет описать и исследовать процесс деформирования объекта, определяемый свойствами элементов структуры последнего.

Большинство действующих подходов к анализу НДС каменной кладки базируются на ограниченном тремя типами механизме разрушения. В некоторых работах исследуется работа каменной кладки преимущественно по критерию сдвига в горизонтальном растворном шве. При этом моделирование тела шва выполнено в классической упругопластической постановке Друккера-Прагера,

а узел соединения раствора и кирпича принят идеально упругим.

Некоторые авторы предлагают рассмотреть кладку как упорядоченную структуру каменной кладки, состоящей из кусочно-однородных элементов. Экспериментально установленная роль интерфейсных элементов в формировании НДС каменной конструкции при ее нагружении, приводят к выводу о целесообразности применения концепции структурного подхода в моделировании каменных конструкций при теоретических исследованиях процесса их деформирования и разрушения под нагрузкой. При этом важнейшим условием формирования моделей, адекватно отражающих работу композитного материала под нагрузкой, является учет особенностей механизмов разрушения, реализующихся при двухосном напряженном состоянии. Установлены (на основе анализа и обобщения данных ранее выполненных исследований) деформационные свойства каменной кладки как композитной разномодульной среды, учитывающие условия работы материалов и напряженное состояние, а также частные характеристики прочности базовых материалов (кирпич и раствор), что обеспечивает корректное моделирование работы материалов кладки в рамках дискретной концепции. Использование системы частных характеристик прочности каменной кладки позволяет выполнить оценку прочности в любой локальной зоне расчетной модели. На основе оценки прочности в локальной зоне представляется возможным отследить изменение структуры расчетной модели: при исчерпании прочности элемента модели по какому-либо критерию такой элемент должен быть исключен из ансамбля модели при работе только по конкретному превышенному критерию. Принцип частных характеристик прочности композитного материала (а каменная кладка является кусочно-однородным разномодульным композитом) является определяющим условием возможности использования метода структурного моделирования [11].

Применение компьютерного моделирования при оценке напряженно-деформированного состояния несущих конструкций зданий из каменной кладки

Кладку стен из рассматриваемого материала было принято моделировать в виде четырех или трех-узловых пластин с заданными жесткостными характеристиками (модуль упругости и коэффициент Пуассона) исходя из экспериментальных исследований над кладкой из двух блоков, так как в нормативных документах в настоящее время нет данных по рассматриваемому материалу. Учет деформирования каменной конструкции по способу, являющегося наиболее подходящим для расчета кладок, как упруго-пластического материала, однако не представляется возможным ввиду большого числа элементов и узлов в схеме 9-ти, тем более 12-ти этажного здания, необходимого рассчитать компьютеру. В связи с этим, при помощи ПК SCAD [12] возможно выполнить общую оценку напряженного состояния несущих стен, но при проектировании реальных объектов необходимо их рассчитывать вручную согласно СП 15.13330.2012. Рассмотрен жилой дом переменной этажности: 9 и 12 этажей высотой этажа 2,8 м с размерами в плане 40,8х12,6 м и с подвальным помещением высотой 2,5 м. Высота здания 25,2 м и 33,6 м соответственно (рис. 4).

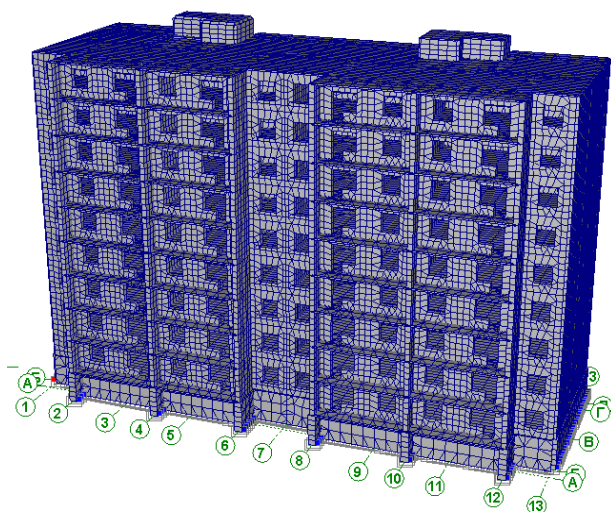


Рисунок 4. Расчетная схема 9-этажного жилого здания.

Оконные проемы размером 1,3х1,4 м. Для оценки характеристик рассматриваемого ма-

териала рассматривались 2 варианта толщины наружных стен зданий: 380 мм и 510 мм, маркировкой блоков 10,7НФ и 14,3НФ соответственно.

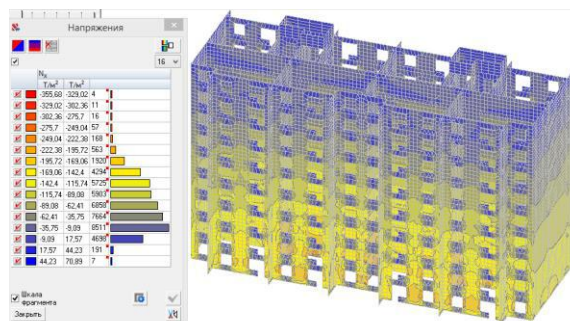


Рисунок 5. Усилия Nx в стенах 9-этажного здания с толщиной стен 380 мм.

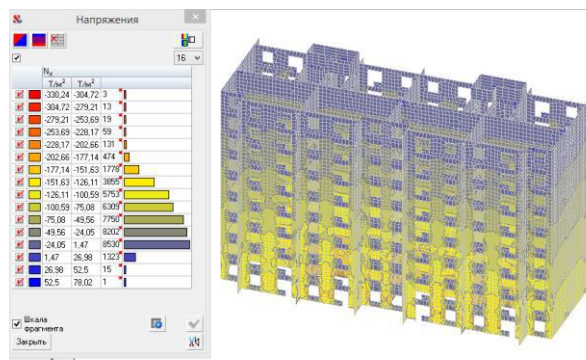


Рисунок 6. Усилия Nx 9 этажного здания с толщиной стен 510 мм.

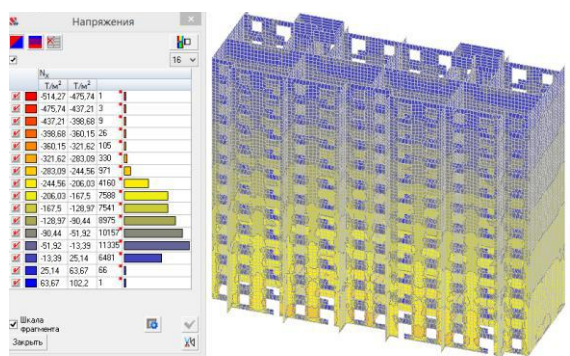


Рисунок 7. Усилия Nx в стенах 12-этажного здания с толщиной стен 380 мм.

Таблица 1. Жесткостные характеристики вертикальных элементов рассчитываемого здания.

Элемент здания	Материал	Толщина, мм	Начальный модуль упругости E_0 , МПа	Расчетный модуль упругости $E=0,5E_0$	Коэффициент Пуассона	Объемный вес, кг/м ³
Наружные стены	Высокопустотный керамический камень 10,7 НФ, раствор цементно-песчаный М100	380(510)	7651	3897	0,13	800
Внутренние стены		250				
Лифтовая, лестничная шахта	Кирпич полнотелый керамический М100, раствор цементно-песчаный М100	250	3600	1800	0,1	1800

Таблица 2. Результаты расчетов здания разной этажности и различных вариантов типов камня.

Полученные значения в ПК SCAD	9 эт. с несущими стенами из блока 10,7НФ толщиной 380 мм	9 эт. с несущими стенами из блока 14,3НФ толщиной 510 мм	12 эт. с несущими стенами из блока 10,7НФ толщиной 380 мм	12 эт. с несущими стенами из блока 14,3НФ толщиной 510 мм
Максимальное значение напряжения $N_{x,T}/m^2$ простенка 1 этажа под перемычкой, как наиболее загруженного участка	242	227,5	324,5	253,7
Расчетное сопротивление, определенное по СП [34], т/м ²	165			
Разница	-31%	-27%	-49%	-35%
Расчетное сопротивление, определенное экспериментально, т/м ²	234,4			
Разница	-3%	+3%	-27%	-9%

Результаты анализа вариантов толщин стен и этажности здания приведены в таблице 2. На основе проведенных исследований можно сказать, что применение в качестве несущих стен высокопустотных керамических изде-

лий возможно, но с соблюдением специальных мероприятий, увеличивающих несущую способность каменной кладки на нижних этажах зданий.

Применение компьютерного моделирования при оценке напряженно-деформированного состояния несущих конструкций зданий из каменной кладки

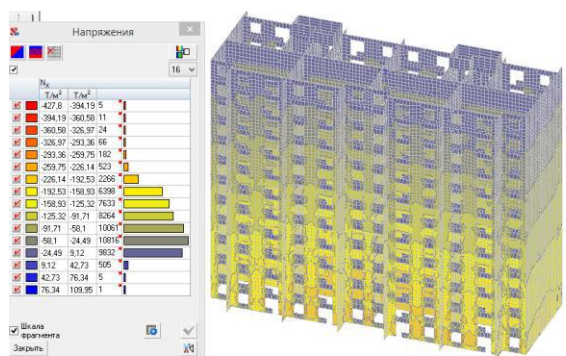


Рисунок 8. Усилия N_x 12 этажного здания с толщиной стен 510 мм.

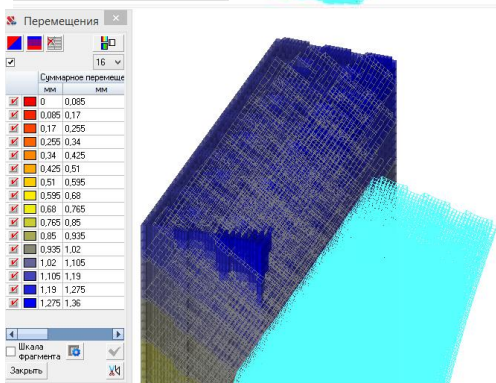
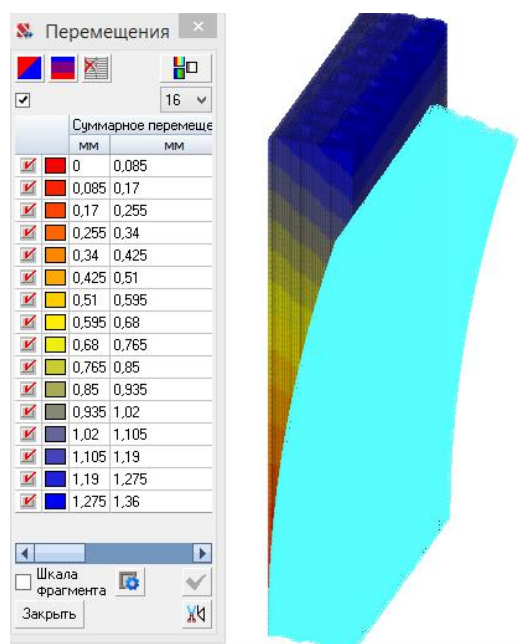


Рисунок 9. Суммарные перемещения простенка

По результатам расчетов не рекомендуется применять рассматриваемый материал в качестве несущих стен в зданиях выше 12 этажей без определенных мероприятий.

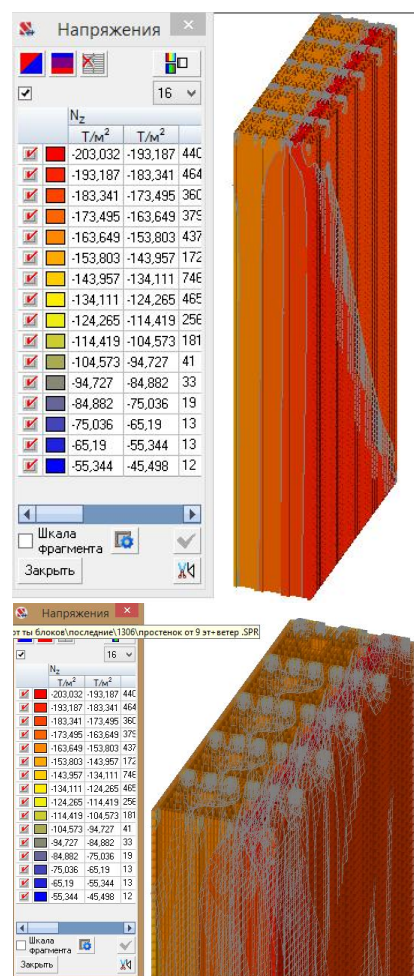


Рисунок 10. Напряжения N_z простенка.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Использование современных программных комплексов для расчета каменных конструкций в отличие от традиционных методов (использованных проектировщиками с 50-х годов прошлого века) позволяет более точно оценить целостную картину реального напряженно-деформированного состояния не только отдельных простенков, но и всего здания в целом, выявить перераспределение напряжений и наиболее нагруженные зоны, что особенно важно при увеличении удельных нагрузок и использовании современных облегченных стеновых изделий. Проведенные теоретические исследования подтвердили возможность использования

современных программных расчетных комплексов для анализа напряженно-деформированного состояния каменных конструкций, изготовленных не только из традиционных стеновых материалов, но и из высокопустотных керамических камней типа Poricam.

Расчеты показали, что выпускаемые отечественными заводами-производителями высокопустотные стеновые изделия можно применять в несущих наружных и внутренних стенах не только в малоэтажном строительстве, но и для зданий повышенной этажности (9-12 этажей).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гагарин В.Г., Дмитриев К.А. Учет теплотехнических неоднородностей при оценке теплозащиты ограждающих конструкций в России и европейских странах // Строительные материалы, №3, 2013, с. 14-16.
2. Бедов А.И., Бабков В.В., Габитов А.И., Гайсин А.М., Резвов О.А., Кузнецов Д.В., Гафурова Э.А., Синицин Д.А. Конструктивные решения и особенности расчета теплозащиты наружных стен зданий на основе автоклавных газобетонных блоков // Вестник МГСУ, №2, 2012, с. 98-103.
3. Гайсин А.М., Бабков В.В. Анализ несущих наружных стен многоэтажных жилых домов в Республике Башкортостан с позиции удельной теплозащитной характеристики // Строительные материалы, №10, 2016, с. 55-58.
4. Бедов А.И., Бабков В.В., Гайсин А.М., Габитов А.И. Опыт эксплуатации жилых и гражданских зданий с теплоэффективными наружными стенами в климатических условиях Республики Башкортостан // Вестник МГСУ, №2, Том 1, 2011, с. 89-94.
5. Бедов А.И., Гайсин А.М., Габитов А.И., Кузнецов Д.В., Салов А.С., Абдулатипова Е.М. Сравнительная оценка методов определения физико-механических характеристик высокопустотных керамических изделий на основе современных программных комплексов // Вестник МГСУ, Том 12, Вып. 1 (100), 2017, с. 17-25.
6. Ищук М.К. Отечественный опыт возведения зданий с наружными стенами из облегченной кладки. М.: Изд-во РИФ «Стройматериалы», 2009. 354 с.
7. Онищик Л.И. Каменные конструкции промышленных и гражданских зданий. – М.: Стройиздат, 1939. – 208 с
8. Рохлин И.А. Расчет керамических конструкций. – Киев: Госстройиздат УССР, 1956. – 289 с.
9. Соколов Б.С. Физическая модель разрушения каменных кладок при сжатии. // Известия вузов. Строительство, 2002, №9, с. 4-9.
10. Донченко О.М., Дегтев И.А. К развитию теории трещиностойкости и сопротивления кладки при сжатии // Известия вузов. Строительство, №10, 2000, с. 16-20.
11. Пангаев В.В., Албаут Г.Н., Федоров А.В., Табанюхова М.В. Модельные исследования напряженно-деформированного состояния каменной кладки при сжатии. // Известия высших учебных заведений: научно-теоретический журнал. Строительство, №2, 2003, с. 24-29.
12. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Микитаренко М.А., Перельмутер А.В. Вычислительный комплекс SCAD. – М.: СКАД-СОФТ, 2013. – 656 с.

Бедов Анатолий Иванович, кандидат технических наук, профессор, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, к. 417; тел. (8499)287-49-19, доб. 30-36; E-mail: gbk@mgsu.ru;

Габитов Азат Исмагилович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительных конструкций, Уфимский государственный нефтяной технический университет; Россия, г. Уфа, ул. Менделеева, д. 195, к. 225; тел. (8347) 228-22-00; E-mail: azat7@ufanet.ru.

Галлямов Азат Абузарович, кандидат экономических, доцент кафедры математики, Уфимский государственный нефтяной технический университет; Россия, г. Уфа, ул. Менделеева, д. 195, к. 319; тел. (8347) 242-87-15; E-mail: dmpraise@gmail.com.

Салов Александр Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры автомобильных дорог и технологии строительного производства, Уфимский государственный нефтяной технический университет; Россия, г. Уфа, ул. Менделеева, д. 195, к. 319; тел. (8347) 228-22-00; E-mail: salov@list.ru.

Гайсин Аскар Миниярович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций, Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, ул. Менделеева, д. 195, к. 225; тел. (8347) 228-22-00.

Anatoliy I. Bedov, Candidate of Technical Sciences, Professor, Department of Concrete and Reinforced Concrete Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; phone +7 (499) 287-49-19, ext. 30-36; E-mail: gbk@mgsu.ru.

Azat I. Gabitov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Building Structures, Ufa State Petroleum Technological University; Office 225, 195 Mendeleeva St., Ufa, 450062, Russian Federation; phone +7 (347) 228-22-00; E-mail: azat7@ufanet.ru.

Azat A. Gallyamov, Candidate of Economics Sciences, Lecturer, Department of Math, Ufa State Petroleum Technological University; Office 225, 195 Mendeleeva St., Ufa, 450062, Russian Federation; phone +7 (347) 242-87-15; E-mail: dmpraise@gmail.com.

Aleksandr S. Salov, Candidate of Technical Sciences, Lecturer, Department "Highways and Technology of Construction Production", Ufa State Petroleum Technological University; Office 319, 195 Mendeleeva St., Ufa, 450062, Russian Federation; phone +7 (347) 228-22-00; E-mail: salov@list.ru.

Askar M. Gaisin, Candidate of Technical Sciences, Lecturer, Department of Building Structures, Ufa State Petroleum Technological University; Office 225, 195 Mendeleeva St., Ufa, 450062, Russian Federation; phone +7 (347) 228-22-00.

УДАР ЛЕТАЮЩЕГО ОБЪЕКТА О ПОДВЕСКУ ВИСЯЧЕГО МОСТА С АНАЛИЗОМ РАЗРУШЕНИЙ

В.Б. Зылев, Н.А. Григорьев

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II (МГУПС (МИИТ)),
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Изложен алгоритм решения задачи ударного взаимодействия для стержневой системы. Интегрирование уравнений движения делается шаговым численным методом по явной вычислительной схеме с привлечением экстраполяции по Адамсу. Рассматривается задача об ударе летящего автомобиля в подвеску висячего моста. Задача решается как пространственная. Показывается, что в зависимости от значения разрывного усилия в подвесках моста реализуются два сценария поведения системы: с локальным и глобальным разрушением конструкции.

Ключевые слова: стержневая система, контактное взаимодействие, уравнения движения, удар летящего предмета, висячий мост, локальное разрушение, глобальное разрушение

CLASH OF FLYING OBJECT WITH A SUSPENDER OF SUSPENSION BRIDGE WITH DAMAGE ANALYSIS

Vladimir B. Zylev, Nikita A. Grigoryev

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, RUSSIA

Abstract: The algorithm for solving the problem of shock interaction of a rods system is being considered in the article. Integration of the equations of motion being done with step numerical scheme with extrapolation by Adams method. We considered the problem of the clash of flying car with a suspender of suspension bridge with further damage analysis. The task is solved as a spatial. It is shown that depending on the breaking force in the suspender of suspension bridge can be realized two scenarios of system behavior: the local and the global destruction of the bridge.

Key words: cable-rod systems, contact interaction, suspension bridge, clash of flying objects, step method of numerical integration of the equations of motion, local collapse, progressive collapse

Задача соударения движущегося объекта с конструкциями различного типа возникает, например, при расчете на воздействие торнадо. Известно [1], что сильные торнадо способны поднимать в воздух весьма тяжелые и массивные элементы разрушенных зданий, автомобили и т.д. Для объектов атомной энергетики существуют нормативные документы, в которых установлены соответствующие регламенты расчета [2]. Для высотных сооружений, уникальных мостов, подобные задачи так же являются актуальными. В настоящей работе рассматривается численное решение задачи соударения на основе использования явной вычислительной схемы интегрирования уравнений движения. Задача

рассматривается как геометрически нелинейная. Используемый численный метод был получен в [3] и подробно описан в [4,5]. Расчетная схема конструкции создается с использованием стержневых элементов, работающих на растяжение-сжатие.

Суть метода интегрирования уравнений движения заключается в том, что на каждом временном шаге интегрирования уравнений движения, по координатам узлов системы вычисляются усилия во всех элементах расчетной схемы. Эти усилия прикладываются к сосредоточенным в узлах расчетной схемы массам и, таким образом, становятся известными ускорения узловых точек, что позволяет определить приращения координат и ско-

ростей узлов на рассматриваемом временном шаге. Экстраполяция по Адамсу позволяет существенно увеличить шаг интегрирования по времени при обеспечении необходимой точности решения.

Наиболее сложная часть задачи соударения заключается в вычислении контактных сил при соударении трехмерных деформируемых тел, которые необходимо определять на каждом шаге интегрирования уравнений движения. Поясним основные этапы решения этой задачи.

В одном из соударяющихся тел выбираются узлы на поверхности, которые далее будем называть внешними. Эта операция делается вручную на стадии разработки модели. В другом соударяющемся теле назначаются треугольные граничные области, которые будем далее называть контактными треугольниками. Необходимо определить нормальные и касательные (по отношению к плоскости каждого контактного треугольника) составляющие сил взаимодействия. Касательные силы взаимодействия должны подчиняться закону Кулона с коэффициентом трения f .

На рассматриваемом временном шаге, по известным координатам узлов определяются контактные треугольники и внешние узлы, которые вступают во взаимодействие. Модель содержит некоторые условные контактные пружины, через которые внешние узлы соприкасаются с контактными треугольниками. Жесткость этих пружин необходимо назначить в начале решения.

Из предыдущего шага по времени берутся смещения внешних узлов относительно соответствующих контактных треугольников. С использованием жесткостей контактных пружин определяются приращения сил контактного взаимодействия и, таким образом, становятся известными текущие значения этих сил, которые были бы, если бы контакт действительно осуществлялся через пружины. Далее производится проверка, не превысили ли модули касательных составляющих предельную силу трения по Кулону Nf ,

где N – значение нормальной составляющей. Если касательная контактная сила больше чем предельная, она уменьшается до предельного значения и можно констатировать, что началось скольжение соответствующего узла по контактному треугольнику. Выбранные (назначенные) значения контактных жесткостей меняют в определенной степени расчетную схему, т.к. являются ее составляющими. Вообще говоря, контактные жесткости следует назначать возможно большими, что будет соответствовать условию отсутствия взаимного проникновения соударяющихся тел в месте касания. Очень сильно увеличивать контактные жесткости, однако нельзя, т.к. это приведет к необходимости уменьшения шага интегрирования. Практически контактные жесткости назначаются так, чтобы они были близки к жесткостям конечных элементов, примыкающих к контактной области. Перейдем к рассмотрению примера.

На рис. 1. Показана расчетная схема висячего автодорожного моста, в подвеску которого должен ударяться летящий автомобиль. Центральный пролет по длине равен 609 метров. Сечения всех элементов моста подобраны из статического расчета. До начала динамического расчета было определено статическое положение равновесия от собственного веса и временной нагрузки, что совершенно необходимо для висячей системы, т.к. внутренние усилия определяют струнную жесткость элементов системы. В узлы проезжей части так же присоединялись массы, соответствующие автомобильной нагрузке.

На рис.2 показана расчетная схема автомобиля, начальные скорости узлов которого можно менять, что задаст скорость летящего автомобиля. Можно рассматривать автомобиль-боек, который движется поступательно или вращается по законам движения гироскопа. В данной статье рассмотрено лишь поступательное движение, с постоянной скоростью вдоль продольной оси моста. Небольшую отрицательную составляющую

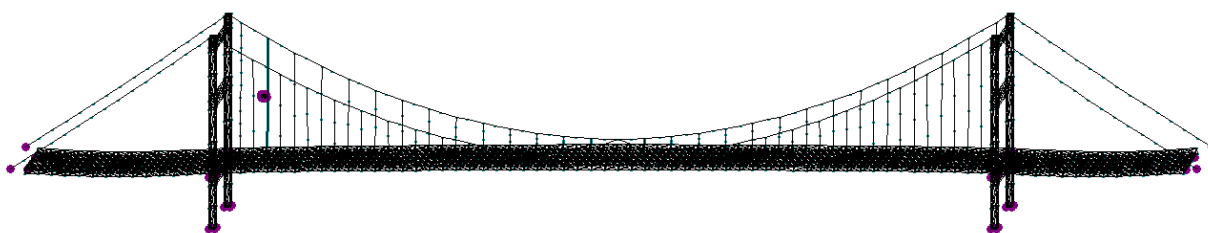


Рисунок 1. Мост под действием собственного веса и временной нагрузки.

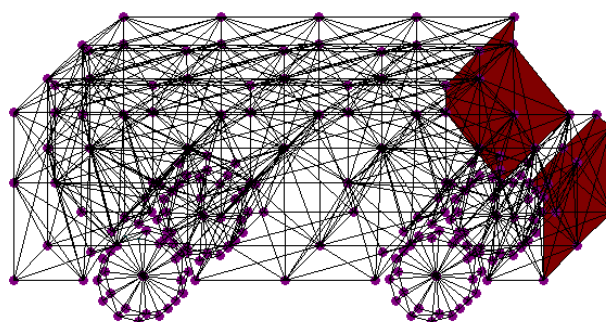


Рисунок 2. Модель автомобиля с контактными треугольниками.

скорости вдоль вертикальной оси автомобиль получает во время полета к подвеске. На передней поверхности автомобиля расположены контактные треугольники, которые видны на рис.2.

Семь внешних узлов расположено на подвеске-мишени, на уровне предполагаемого удара.

Масса автомобиля 1800 кг. Все подвески моста имеют одинаковые характеристики: погонная масса 75 кг/м, $EA=1,183 \cdot 10^6$ кН, разрывное усилие 8281 кН. Подвеска, по которой наносится удар, моделируется при помощи 100 стержневых элементов. Остальные подвески имеют шаг дискретизации значительно больший и с тремя – десятью стержневыми элементами, в зависимости от их длин. Вся схема содержит 1859 узлов и 8572 стержневых элементов.

Во время решения на экран дисплея можно выдавать мультфильм движения с произвольным шагом. Шаг для численного интегрирования наша компьютерная программа определяет автоматически. В данном случае он составляет 0,0000075сек. Этот шаг обеспечивает хорошую точность решения.

Теперь перейдем к анализу результатов решения. На рис. 3 показано состояние системы в момент времени $t = 0,375$ с. при минимальной разрушающей скорости автомобиля 67 м/с. Согласно численному решению в момент времени $t = 0,20201$ с. (0,20203) произошел обрыв подвески, в которую врежется летящий автомобиль. Здесь в скобках указан момент времени обрыва, полученный с уменьшенным в два раза шагом интегрирования. Как видно эти результаты очень близки, следовательно, достигнута хорошая точность решения по временному шагу.

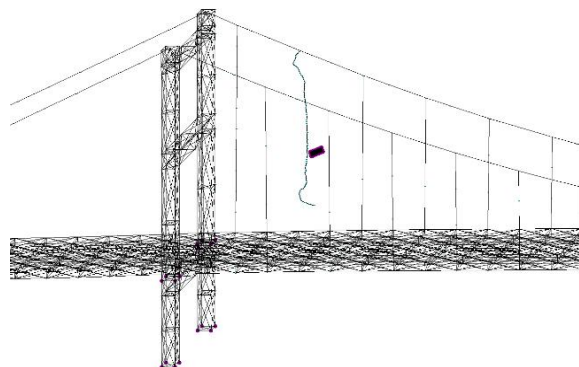


Рисунок 3. Состояние системы в момент времени 0.37с.

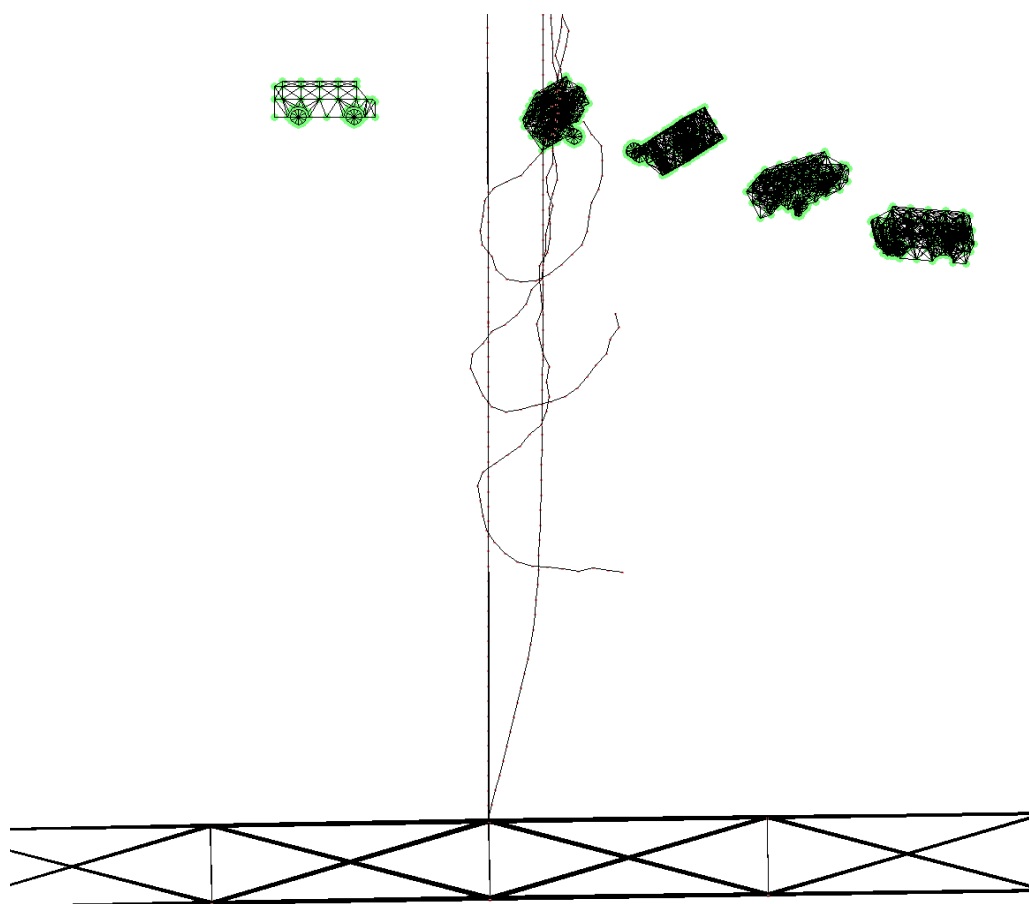


Рисунок 4. Стробоскопический чертеж системы с шагом по времени 0,2 с.

На рис. 4 дан стробоскопический чертеж системы за отрезок времени 1 с шагом 0,2 с. Как видно подвеска оборвалась в месте крепления к балке, что характерно и объяснимо с точки зрения закономерностей отражения волны деформаций от полной или частичной заделки.

На рис. 5 приведены графики изменения усилий в трех подвесках: левее подвески-мишени, в самой мишени и подвеске правее от мишени. Как видно, усилия в соседних подвесках существенно возрастают по сравнению со статическими, но немного не достигают значений разрывного усилия и прогрессирующее разрушение не наступает. Теперь, пусть несколько искусственно, изменим условия задачи, а именно, уменьшим разрывное усилие до 6100 кН.

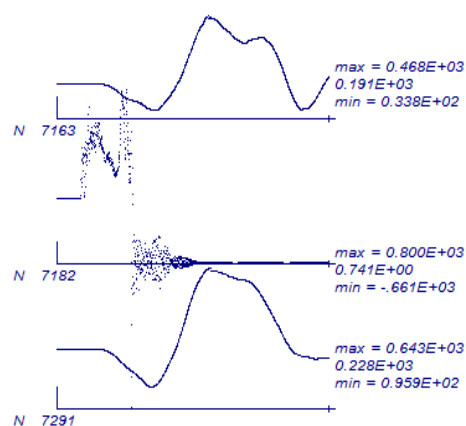


Рисунок 5. Графики изменения усилий во времени в трех подвесках: верхний график – левее мишени, средний – в самой подвеске-мишени и нижний – правее мишени.

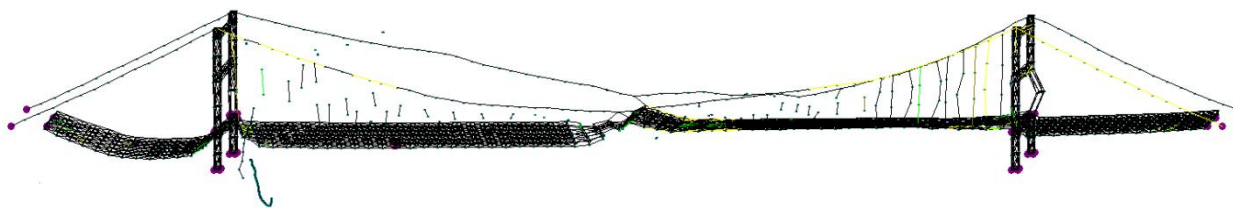


Рисунок 6. Момент полного обрушения моста при $t = 3,4$ с.

Как показал расчет, в этом случае минимальная разрушающая скорость уменьшилась до 55 м/с, при этом наступает последовательное разрушение подвесок, начиная с подвески-мишени далее направо, что заканчивается глобальным обрушением всей системы. На рис. 6 показан момент обрушения моста при $t = 3,4$ с. с разрушением элементов проезжей части.

ВЫВОДЫ

1. Расчет показал, что при недостаточном запасе прочности подвесок для рассмотренной системы вполне может наступить стадия последовательных разрушений.
2. Задачи, подобные рассмотренной, могут возникать и при автомобильной аварии на мосту, при навале самолета на конструкцию. Их решение может быть выполнено аналогично решению рассмотренной здесь задаче.

ЗАМЕЧАНИЕ

Данная работа выполнена в рамках гранта, полученного в фонде «ОСНОВАНИЕ». Учредители фонда:

- ОАО «Институт Гипростроймост»,
- Группа компаний «СК МОСТ».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. **Наливкин Д.В.** Смерчи. – М.: Наука, 1984. – 112 с.

2. **Саргсян А.Е.** Динамика и сейсмостойкость сооружений атомных станций. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. – 550 с.
3. **Зылев В.Б., Штейн А.В.** Численное решение задачи о нелинейных колебаниях системы нитей. // Строительная механика и расчет сооружений, №6, 1986, с. 58-61.
4. **Зылев В.Б.** Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. – М.: НИЦ Инженер, 1999. – 144с.
5. **Александров А.В., Потапов В.Д., Зылев В.Б.** Строительная механика. Книга 2. Динамика и устойчивость упругих систем. – М.: Высшая школа, 2008. – 384 с.

Зылев Владимир Борисович, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики; Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II; 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д 9, стр. 9; e-mail: Zylevzb@yandex.ru

Григорьев Никита Алексеевич, кандидат технических наук; кафедра строительной механики; Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II; 127994, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д 9, стр. 9; E-mail: Gr_Nik2003@mail.ru

Vladimir B. Zylev, Professor, Dr. Sc., Department of Structural Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT); 9, Obraztsova Street, 127994, Moscow, Russia; E-mail: Zylevzb@yandex.ru

Nikita A. Grigoryev, Department of Structural Mechanics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT); 9, Obraztsova Street, 127994, Moscow, Russia; E-mail: Gr_Nik2003@mail.ru.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ПРИОПОРНЫХ ЗОНАХ

О.В. Кабанцев¹, К.О. Песин², А.В. Карлин²

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

²ООО «МонолитСтройПроект», г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В статье рассматривается вопрос распределения напряжений в опорной зоне безригельного перекрытия при различных схемах поперечного сечения опорной конструкции. Выполнен детальный анализ численными методами напряженно-деформированного состояния опорной зоны безригельного перекрытия. Рассмотрены варианты моделей, сформированные как из пластинчатых, так и из объемных конечных элементов. Численными исследованиями установлены особенности формирования схемы деформирования приопорной зоны перекрытия. Получены схемы распределения нагрузок на контур опорной конструкции различного сечения. По результатам численного исследования установлено, что нормативная (традиционная) схема нагрузок на контур опоры соответствует сечению опорной конструкции, близкой к квадрату или прямоугольнику с соотношением сторон 1:2. Для вытянутых опорных контуров схема распределения нагрузок на контур опоры имеет существенные отличия от нормируемого. Установлено, что в торцевых зонах протяженных в плане опорных конструкций схема напряженно-деформированного состояния соответствует схеме НДС, формирующейся на квадратной (или близкой к квадрату) опорной конструкции. Разработаны предложения по учету особенностей НДС зоны опирания для расчета конструкции плиты по критерию продавливания.

Ключевые слова: моделирование, численные методы, расчетная модель, напряженно-деформированное состояние, железобетонные конструкции, продавливание

ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF REINFORCED CONCRETE PLATE AROUND SUPPORT ZONES

Oleg V. Kabantsev¹, Kirill O. Pesin², Alexey V. Karlin²

¹National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

²“MonolitStroyProekt” LTD, Moscow, RUSSIA

Abstract: Structural analysis of the formation and evolution processes of structural microdestruction with the transition to macrorestriction occurring during plastic deformation of masonry under biaxial stresses. The dependencies that determine the amount of the plastic phase of the deformation of masonry. Identified processes and their corresponding strength criteria, which play a key role in the implementation phase of plastic deformation. It is shown that plastic deformation of masonry under biaxial stresses occurs when the physical line operation of the basic materials of masonry (brick and mortar). Found that the plastic properties of masonry under biaxial stresses are determined by the processes occurring at the nodes of contact interaction of brick and mortar in horizontal and vertical joints. According to the results of numerical studies the values of the coefficients of ductility of masonry at different variants of mechanical characteristics of brick, mortar and adhesive strength of their interaction.

Keywords: masonry, brick, mortar, modelling, numerical methods, calculation model, strain-stress state

1. ВВЕДЕНИЕ

Практика проектирования и строительства зданий и сооружений с несущей системой их монолитного железобетона показывает, что

для зданий гражданского назначения наиболее широко используются конструкции безригельного каркаса рамно-связевой конструктивной схемы. Для таких несущих систем наиболее ответственным конструктив-

ным элементом является узел стыка вертикальной несущей конструкции (колонны, пилона) с перекрытием. Широкое распространение получили бескапительные виды стыка, применение которых позволяет получить конструкции с более высокими потребительскими качествами по отношению к конструкциям с капительными стыками. Вместе с тем, бескапительные стыки характеризуются более высокими уровнями напряжений, что (вследствие их конструктивных особенностей) требует особых методов для обеспечения их несущей способности – прежде всего по критерию продавливания.

Исследования явления продавливания железобетонных конструкций имеют более чем столетнюю историю. Так, в одной из первых отечественных книг по расчету и проектированию железобетонных конструкций [1] приведены указания по методам расчета и конструирования опорных узлов в безбалочных покрытиях, а также ряд конструктивных требований к размерам как опорных конструкций, так и приопорных зон железобетонных плит (стр.19-22). В начале XX века широко использовалась в практике проектирования железобетонных конструкций книга [2], в которой также приведены указания по расчету и конструированию опорных узлов перекрытий, где может реализовываться явление продавливания (стр. 524-525).

В исследованиях железобетонных конструкций, выполненных во второй половине и в конце XX века, проблема продавливания рассматривалась достаточно широко. Так, в работах А.С. Залесова [3, 4, 5], Н.И. Карпенко [6, 7] и зарубежных исследователей (см., например, [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]) рассматриваются различные аспекты явления продавливания железобетонных плит. Показано, что продавливание имеет весьма сложные механизмы, которые определяются не только (и не столько) работой бетонного тела конструкции, но и влиянием как продольного, так и поперечного армирования в приопорных зонах. Предложено несколько моделей

работы плит при продавливании (детальный анализ моделей представлен в [5].

Вместе с тем, достаточно часто звучит мнение, что разрушение, которое рассматривается по механизму продавливания, представляет собой частный случай разрушения железобетонной конструкции по наклонному сечению. Однако, в работах [15, 16] показано, что такой подход является не вполне корректным. Таким образом, явление продавливания железобетонных плит требует специальных исследований, учитывающих особенности сложных механизмов, в нем реализующихся.

Детальный анализ исследований по проблеме продавливания показывает, что подавляющее большинство работ рассматривают разрушение по механизму продавливания с формированием **замкнутого вокруг опоры** (выделено авторами) контура разрушения с различными углами наклона граней к горизонтали. При этом форма продавливающего штампа (опорной поверхности плиты) принималась, как правило, круглой, квадратной или близкой к квадратной. К немногочисленным исследованиям иных форм опорных конструкций могут быть отнесены работы С.Ф. Клованича и В.И. Шеховцова, в рамках которых рассматриваются крестообразная и уголкового формы (результаты исследований представлены в монографии [17]). Но и в указанных исследованиях также рассматриваются схемы разрушения плит по контуру, замкнутому по периметру опоры.

В настоящее время в зданиях жилого назначения широкое распространение получает идея отказа от массового применения колонн квадратного или круглого сечения с более широким использованием вертикальных несущих конструкций в виде прямоугольных пилонов и фрагментов стен, что позволяет создать более удобные и комфортные (с позиций архитектора) объемно-планировочные решения. Так, стали массово применяться пилоны с соотношением сторон от 1:3 до 1:5 и более или простенки с длиной $L \geq 1,2$ м. Такие опорные конструкции не требуют (в соответ-

ствии с положениями действующих норм) проверок и проектирования опорных зон плит перекрытий по критерию продавливания. Вместе с тем, один из авторов был свидетелем разрушения приопорной зоны плиты перекрытия у торца протяженной в плане опоры (стены) со схемой разрушения, соответствующей механизму продавливания, что свидетельствует о необходимости анализа НДС таких приопорных участков перекрытий с позиций критериев продавливания. Таким образом, исследование работы плит перекрытия в приопорных зонах при различных вариантах сечения опорных конструкций является, несомненно, важной и актуальной задачей.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

При опирании плоских плит перекрытий на опорную конструкцию с сечением отличным от круглого, квадратного (близкой к квадрату) распределение напряжений в приопорной зоне, очевидно, будет иным по отношению к принятому в действующих нормах [18]. В монографии [19] показано, что принятая схема контура продавливания, который формируется **вокруг** опорной конструкции, является далеко не универсальной и при рассмотрении расчетного случая опирания перекрытия на крайнюю (угловую) колонну контур продавливания формируется на основе иных принципов.

При анализе НДС плит перекрытия в приопорных зонах следует учесть, что формирование касательных напряжений (τ) в толще плиты происходит не по линейным зависимостям от нагружающих конструкцию усилий. В связи с указанным представляется обоснованным исследовать НДС приопорных зон на основе анализа распределения нагрузок на контур опоры, что позволит выполнить сопоставление состояния плиты при различных вариантах сечений опорных конструкций, используя при этом физически линейную расчетную модель.

Исследование НДС приопорных зон плит перекрытия выполнено численными методами с использованием BK SCAD [20].

Рассматривается опирание железобетонной плиты толщиной 200 мм перекрытия на следующие варианты сечения опорных конструкций при соотношении сторон $s:l$, где s – короткая сторона опоры (торец), l – длинная сторона опоры:

- **1** – соотношение сторон $s:l = 1:1$ (колонна 400x400);
- **2** – соотношение сторон $s:l = 1:2$ (пилон 400x800);
- **3** – соотношение сторон $s:l = 1:3$ (пилон 400x1200);
- **4** – соотношение сторон $s:l = 1:4$ (пилон 400x1600);
- **5** – соотношение сторон $s:l = 1:5$ (пилон 400x2000).

Качественно оценить схему НДС плитных конструкций в зонах формирования продавливания можно на основе схемы деформирования приопорных зон плит. Известно, что наиболее корректные результаты деформирования могут быть получены на основе моделей с использованием объемных конечных элементов (типа «солид») – расчетная модель, сформированная из КЭ указанного типа, представлена на рис. 1. В расчетной модели варьировались размеры поперечного сечения центральной опоры с исследованием НДС приопорной зоны перекрытия (зона **k**, рис. 1). Для исследования схем нагружения опорного контура по каждому из исследуемых вариантов опор разработаны модели на основе КЭ типа «оболочка» (по теории Рейснера-Миндлина) при этом для каждого варианта использованы различные сетки КЭ – от 400x400 мм до 25x25 мм (рис. 2).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Наибольшее представление о схеме деформирования плиты с опиранием на пилон вытянутого типа дает схема деформирования по варианту **5** (рис. 3).

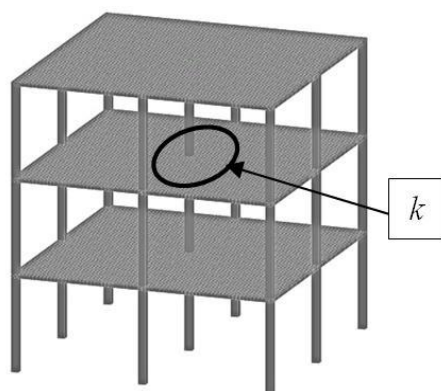


Рисунок 1. Расчетная модель железобетонного перекрытия с безригельным стыком перекрытия и колонны (пилона).

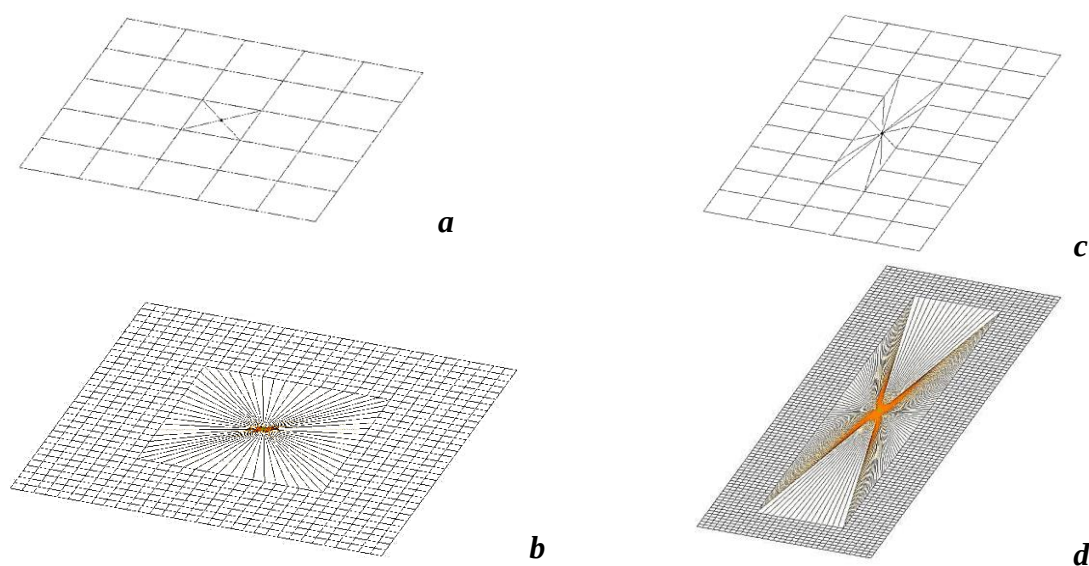


Рисунок 2. Модели приопорных зон плит перекрытия - схемы сеток КЭ:

a – опора с соотношением сторон $s:l = 1:1$, сетка 400×400 мм; **b** – то же, сетка 25×25 мм; **c** – опора с соотношением сторон $s:l = 1:5$, сетка 400×400 мм; **d** – то же, сетка 25×25 мм.

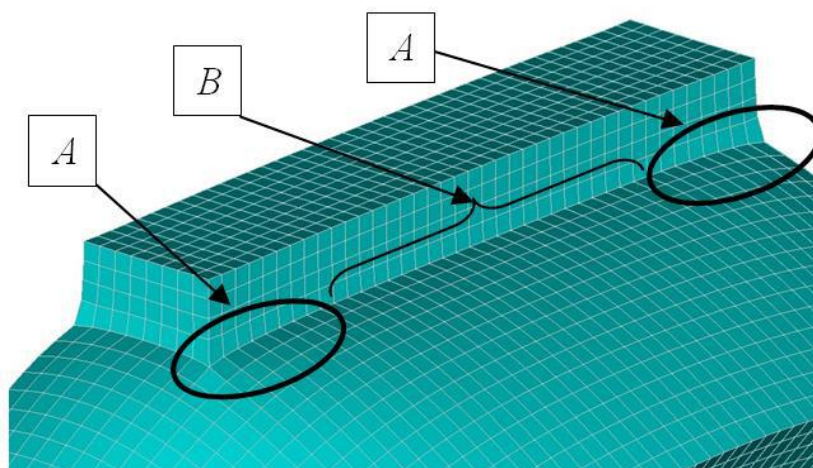


Рисунок 3. Схема деформирования приопорной зоны (зона **k** – рис. 1) плиты при опирании на пилон с соотношением сторон 1:5 (вариант 5).

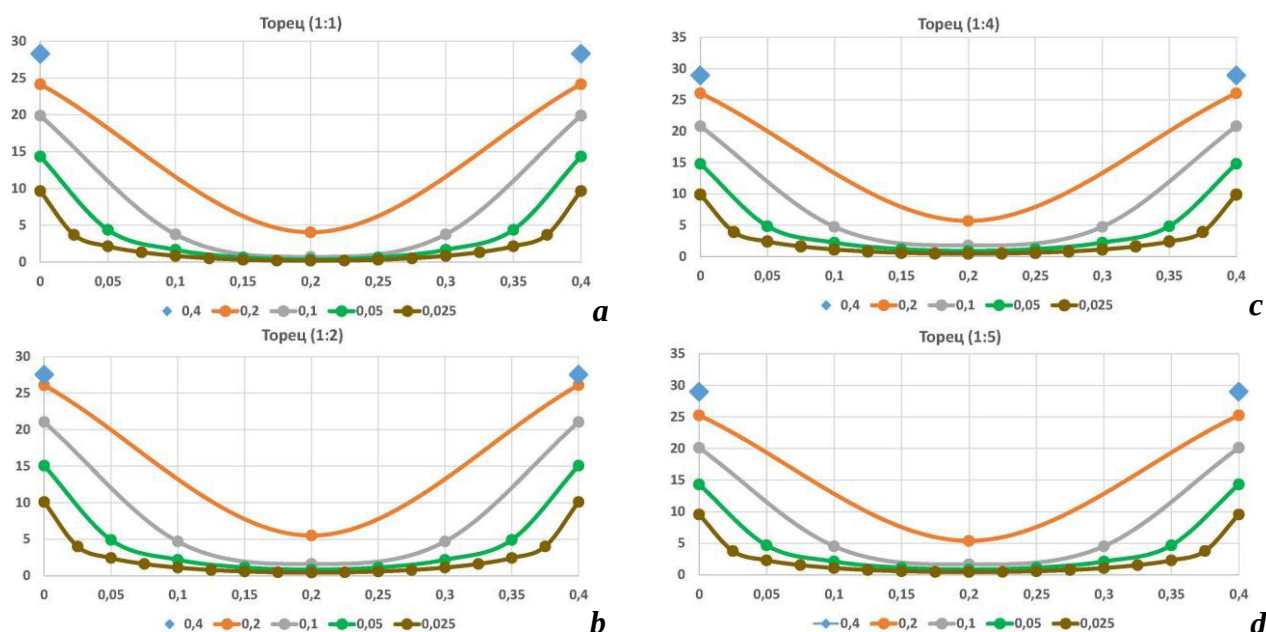


Рисунок 4. Распределение нагрузок по длине короткой (торцевой) стороны опорной зоны: **а** – опора с соотношением сторон $s:l = 1:1$; **б** – то же, соотношение сторон $s:l = 1:2$; **с** – то же, соотношение сторон $s:l = 1:4$; **д** – то же, соотношение сторон $s:l = 1:5$. Графики нагрузок приведены при различной сетке КЭ приопорной зоны перекрытия: 0,4; 0,2; 0,1; 0,05; 0,025 м.

Анализ схемы деформирования плиты при вытянутой в плане опорной конструкции позволяет выделить два типа участков приопорной зоны по длинной стороне опорного контура: участок **А** (приурочен к торцевой зоне) – наблюдается выраженное деформирование линии контакта КЭ плиты и КЭ опорной конструкции; участок **В** (средняя часть) – деформирование линии контакта не наблюдается. Графики распределения нагрузок по линии короткой стороны опоры (торец) имеет как общий характер, так и равные значения величин нагрузок в аналогичных точках (рис. 4). Графики распределения нагрузок на опорный контур по его длинной стороне (для соотношений сторон $s:l = 1:2$; $1:3$; $1:4$ и $1:5$) представлены на рис. 5. Схема распределения нагрузок по длинной стороне опорного контура соответствует схеме деформирования приопорной зоны плиты перекрытия, установленной в рамках численного эксперимента на моделях, сформированных из объемных КЭ (см. рис. 3): значимые нагрузки выявлены на

участках, прилегающих к торцам опор, на средней части длинной стороны опорного контура значения нагрузок близки к нулю. Полученное распределение нагрузок по длинной стороне вытянутой в плане опоры позволяет с большой степенью определенности утверждать, что применение традиционных методов расчета узла по критерию продавливания с равномерным распределением нагрузок по периметру опоры не соответствует реальному НДС плитной конструкции в приопорных зонах при вытянутых в плане опорах, начиная с соотношения сторон $s:l \geq 1:2$. При этом на участках длинной стороны опоры (**В**), примыкающих к торцам, наблюдается схема нагрузок, близкая к схеме нагрузок по короткой стороне (**с**).

Для детального рассмотрения зон опорного контура, прилегающих к торцу опоры, на рис. 6 представлены графики распределения нагрузок на фрагменты длинной стороны (**В**), примыкающие к торцу опоры, с длиной, равной длине короткой стороны, т.е. $l_1=s$.

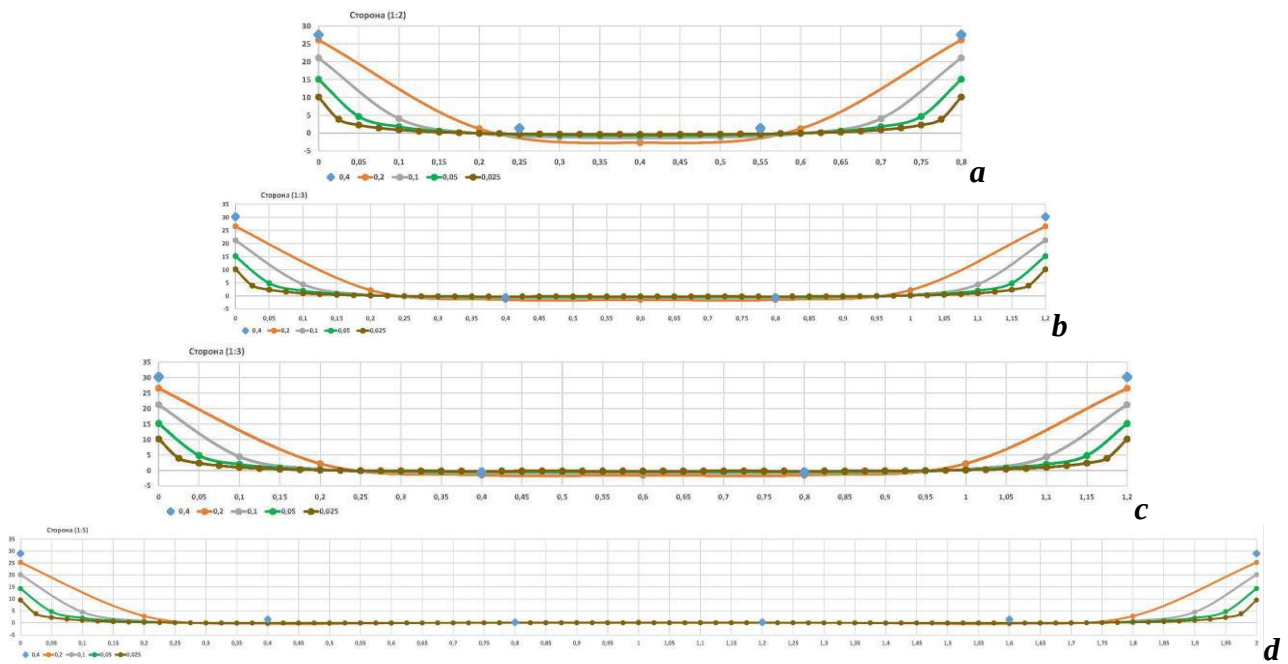


Рисунок 5. Распределение нагрузок по длинной стороне опорной зоны:
а – опора с соотношением сторон $s:l = 1:2$; **б** – то же, соотношение строн $s:l = 1:3$;
с – то же, соотношение строн $s:l = 1:4$; **д** – то же, соотношение строн $s:l = 1:5$.
 Графики нагрузок приведены при различной сетке КЭ приопорной зоны перекрытия:
 0,4; 0,2; 0,1; 0,05; 0,025 м.

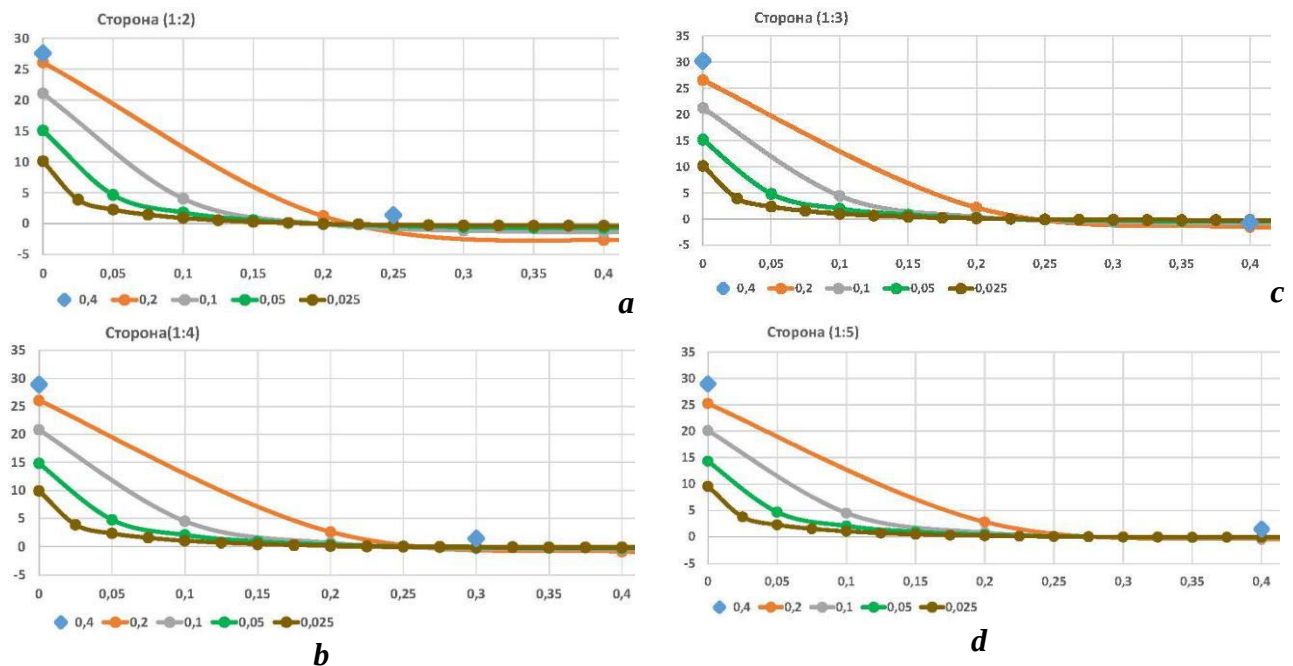


Рисунок 6. Распределение нагрузок по длинной стороне опорной зоны, прилегающей к торцу опоры: **а** – опора с соотношением сторон $s:l = 1:2$; **б** – то же, соотношение строн $s:l = 1:3$;
с – то же, соотношение строн $s:l = 1:4$; **д** – то же, соотношение строн $s:l = 1:5$.
 Графики нагрузок приведены при различной сетке КЭ приопорной зоны перекрытия:
 0,4; 0,2; 0,1; 0,05; 0,025 м.

Анализ нагрузок на зоны длинной стороны, примыкающие к торцам опор, показывает, что на участке $l_1' = 0,5s$ схемы распределения нагрузок и их величины полностью соответствуют нагрузкам на короткую сторону (торец) вытянутой опоры.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку схема нагрузок на краевой участок длинной стороны вытянутой в плане опоры, а также на торец полностью совпадает с аналогичной схемой по любой стороне квадратной в плане опоры, представляется возможным утверждать, что схема разрушения по механизму продавливания, установленная нормами для опор квадратной (или близкой к квадрату) формы, должна быть принята и для крайних зон протяженных опор.

Величина участка длинной стороны протяженной опоры, на котором следует учитывать возможность разрушения по механизму продавливания с выполнением соответствующих расчетных проверок, может быть принята равной $l_1' = 0,5s$.

Таким образом, численными исследованиями установлено, что разрушение по механизму продавливания может реализовываться на краевых зонах протяженных в плане опор плит перекрытий. Результаты исследований подтверждаются наблюдениями авторов статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лахтин Н.К., Кашкаров Н.А.** Железобетон. Часть III. Основания расчета железобетонных сооружений. – М.: Государственное техническое издательство, 1925. – 161 с.
2. **Залингер Р.** Железобетон. Его расчет и проектирование. – М.: – Л.: Государственное научно-техническое издательство, 1931. – 671 с.
3. **Залесов А.С., Ермуханов К.Е., Качановский С.Г.** Продавливание железобетонных плит. В кн. Исследования железобетонных конструкций при статических, повторных и динамических воздействиях. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1984, с. 17-22.
4. **Залесов А.С., Ермуханов К.Е., Момбеков И.А.** Прочность плит с поперечной арматурой на продавливание. // Бетон и железобетон, №6, 1990, с. 23-24.
5. **Залесов А.С.** Проектирование и расчет железобетонных монолитных зданий. – М.: 2010. – 279 с.
6. **Карпенко Н.И., Карпенко С.Н.** Практическая методика расчета железобетонных плит на продавливание по различным схемам. // Бетон и железобетон, №5, 2012, с. 10-16.
7. **Карпенко Н.И., Карпенко С.Н.** К построению общей методики расчета железобетонных плит на продавливание с учетом влияния моментов. // Вестник МГСУ, №3, т. 2, 2011, с. 86-91.
8. **Menetrey P.** Numerical Analysis of Punching Failure in Reinforced Concrete Structures. // Lausanne, EPFL, 1994, 178 pages.
9. **Hueste M.B.D., Browning J., Lepege A., Wallace J.W.** Seismic Design Criteria for Slab-Column Connections. // ACI Structural Journal. 2007-08. Title no 104-S43. Pp. 448-458.
10. **Muttoni A.** Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement. // ACI Structural Journal. 2008-08. Title no 105-S42, pp. 440-450.
11. **Bompa D.V., Onet T.** An Incursion in Punching of Reinforced Concrete Flat Slabs. // Universitatea Tehnica "Gheorghe Asachi" din Iasi Tomul LV (LIX), Fasc. 2, 2009.
12. **Sacramento P.V.P., Federreira M.P., Oliveira D.R.C., Melo G.S.S.A.** Punching Strength of Reinforced Concrete Flat Slabs Without Shear Reinforcement. //

- Ibracon Structures and Materials Journal. Volume 5, Number 5 (October 2012) p. 659-691. ISSN 1983-4195.
13. **Zhang X.** Punching Shear Failure Analysis of Reinforced Concrete Flat Plates Using Simplified Ust Failure Criterion. // School of Engineering Faculty of Engineering and Information Technology. 2002. December, 141 pages.
 14. **Tian Y.** Behavior and Modeling of Reinforced Concrete Slabs-Column Connections (Dissertation Doctor of Philosophy // The University of Texas at Austin May 2007.
 15. **Гвоздев А.А., Залесов А.С., Ермуханов К.Е.** Переходные формы между разрушением по наклонному сечению и продавливанием. // Бетон и железобетон, №3, 1980, с. 27-29.
 16. **Залесов А.С., Гунтарь В.А., Чижевский В.В.** Краевое продавливание. // Бетон и железобетон, №2, 1990, с. 36-38.
 17. **Клованич С.Ф., Шеховцов В.И.** Продавливание железобетонных плит. Натурный и численный эксперименты. – Одесса: ОНМУ, 2011. – 119 с.
 18. Свод правил СП 63.13330.2012 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. – М.: Минрегион России. – 2012. – 156 с.
 19. **Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Трекин Н.Н.** Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. – М.: АСВ, 2011. – 352 с.
 20. **Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Микитаренко М.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.** SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++. – М.: СКАД СОФТ, 2015. – 808 с.
- 129337, Россия, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; Тел. +7 (495) 287-49-14 доб. 3036, 3084; E-mail: ovk531@gmail.com.
- Песин Кирилл Олегович, инженер, ООО «МонолитСтройПроект»; 109386, Россия, г. Москва, ул. Краснодарская, дом. 19 корпус. 2, этаж 1, пом. II, комн. 9,12; E-mail: pesinkirill@rambler.ru.
- Карлин Алексей Владимирович, инженер, ООО «МонолитСтройПроект»; 109386, Россия, г. Москва, ул. Краснодарская, дом. 19 корпус. 2, этаж 1, пом. II, комн. 9,12; E-mail: karlinmsp@gmail.com
- Oleg V. Kabantsev. Professor, Dr.Sc., Professor of Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures; National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; Phone . +7 (495) 287-49-14 add 3036, 3084; E-mail: ovk531@gmail.com.
- Kirill O. Pesin, Engineer, Engineer, "MonolitStroy-Proekt" LTD; 19/2, ul. Krasnodonskaya, Moscow, 109386, Russia; E-mail: pesinkirill@rambler.ru.
- Alexey V. Karlin, Engineer, "MonolitStroyProekt" LTD; 19/2, ul. Krasnodonskaya, Moscow, 109386, Russia; E-mail: karlinmsp@gmail.com.

Кабанцев Олег Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет;

РАСЧЕТ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НА ВХОДЕ ФИЛЬТРА

Л.И. Кузьмина¹, Ю.В. Осипов²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, РОССИЯ

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Рассматривается задача фильтрации суспензии в пористой среде с геометрическим механизмом захвата частиц. В пористой среде имеется первоначальный осадок, неравномерно распределенный вдоль фильтра. Нелинейная модель долговременной глубинной фильтрации предполагает, что пористость и проницаемость пористой среды зависят от величины осадка. Определяется асимптотика подвижной границы раздела двух фаз. Асимптотическое решение задачи построено и рассчитано вблизи входа фильтра.

Ключевые слова: фильтрация, пористая среда, взвешенные и осажденные частицы, граница раздела фаз, асимптотика.

CALCULATION OF THE FILTRATION PROBLEM AT THE FILTER INLET

Ludmila I. Kuzmina¹, Yuri V. Osipov²

¹ National Research University Higher School of Economics, Moscow, RUSSIA

² Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: Filtration of the suspension in a porous medium with a geometric particle capture mechanism is considered. The porous medium has an initial deposit unevenly distributed across the filter. The nonlinear model of deep bed filtration suggests that the porosity and permeability of the porous medium depend on the deposit. The asymptotics of the movable boundary of the two phases is determined. The asymptotic solution of the problem is constructed and calculated near the filter inlet.

Keywords: deep bed filtration, porous medium, suspended and retained particles, phase boundary, asymptotic solution.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие грунтовые пласты и строительные материалы являются пористыми средами, способными накапливать влагу и содержащиеся в ней частицы. Задачи фильтрации описывают процесс прохождения суспензии – жидкости с твердыми взвешенными микроскопическими частицами через пористую среду. Некоторые частицы проходят через пористую среду, а часть застревает в порах и образует осадок. При накоплении осадка меняется структура пористой среды, прочность и проницаемость грунтов и материалов. Теоретические исследования, полевые изыскания и лабораторные эксперименты позволили построить различные модели фильтра-

ции [1-5]. В настоящей работе рассматривается одномерная модель долговременной глубинной фильтрации с механико-геометрическим механизмом захвата частиц [6,7]. Два уравнения в частных производных первого порядка, описывающие баланс масс взвешенных и осажденных частиц и скорость роста осадка, образуют нелинейную гиперболическую систему. В ряде случаев для данной модели найдены точные решения [8-11]. При отсутствии точного решения строятся асимптотики, позволяющие приближенно моделировать задачу [12-14], и выполняются численные расчеты [15-17]. При периодической закачке суспензии в пористую среду в порах происходит накопление осадка. Рассмотрим один из шагов дан-

ного процесса. В начальный момент пористая среда заполнена чистой водой и в порах имеется первоначальный осадок, неравномерно распределенный вдоль фильтра. На вход фильтра подается суспензия постоянной концентрации, которая движется через поры и постепенно вытесняет воду. Модель учитывает изменение пористости и проницаемости пористой среды при увеличении концентрации осадка. В статье определена асимптотика подвижной границы раздела двух фаз, построено асимптотическое решение задачи вблизи входа фильтра и выполнен расчет асимптотики.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Фильтрация суспензии в пористой среде с неизвестными концентрациями взвешенных $C(x,t)$ и осажженных $S(x,t)$ частиц описывается системой уравнений

$$\frac{\partial(g(S)C)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C. \quad (2)$$

Здесь коэффициент фильтрации $\Lambda(S)$, пористость $g(S)$ и проницаемость $f(S)$ неотрицательны и гладко зависят от осадка $S(x,t)$. Соответствующие начальные и краевые условия имеют вид

$$C|_{x=0} = 1; \quad (3)$$

$$C|_{t=0} = 0; \quad S|_{t=0} = p(x). \quad (4)$$

Условия (3), (4) определяют единственное решение задачи в области

$$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\}.$$

Область Ω состоит из двух подобластей Ω_s и Ω_w , в которых находятся вода и суспен-

зия. Подвижная граница раздела двух фаз – фронт концентрации взвешенных частиц суспензии распространяется в пористой среде с переменной скоростью

$$v(x) = f(p(x)) / g(p(x))$$

вдоль характеристики, заданной уравнением

$$dx / dt = v(x), \quad x(0) = 0.$$

Граница Γ задается уравнением

$$t_{\Gamma}(x) = \int_0^x \frac{g(p(y))}{f(p(y))} dy. \quad (5)$$

Перед фронтом концентрации в области чистой воды Ω_w решение не зависит от времени:

$$C = 0, \quad S = p(x).$$

За фронтом концентрации в области суспензии Ω_s решение положительно:

$$C(x,t) > 0, \quad S(x,t) > 0.$$

На границе Γ решение $C(x,t)$ имеет разрыв, а $S(x,t)$ теряет гладкость.

Зададим условие на характеристике Γ

$$S|_{t=t_{\Gamma}(x)} = p(x), \quad 0 < x < 1. \quad (6)$$

В области Ω_s решение задачи Гурса (1) – (3), (6) совпадает с решением исходной задачи (1) – (4) и является гладким.

3. АСИМПТОТИКА ВБЛИЗИ ВХОДА ФИЛЬТРА

В окрестности входа фильтра $x = 0$ будем искать асимптотику решения в виде

$$\begin{aligned} C(x, t) &= 1 + c_1(x, t)x + O(x^2); \\ S(x, t) &= s_0(x, t) + s_1(x, t)x + O(x^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Представим коэффициенты системы (1), (2) в виде ряда по степеням малого x :

$$\begin{aligned} g(S) &= g(s_0) + g'(s_0)s_1x + O(x^2); \\ f(S) &= f(s_0) + f'(s_0)s_1x + O(x^2); \\ \Lambda(S) &= \Lambda(s_0) + \Lambda'(s_0)s_1x + O(x^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим разложения (7), (8) в систему (1), (2). Приравнявая слагаемые при старших степенях x , получаем рекуррентную систему уравнений

$$s'_0 = \Lambda(s_0); \quad (9)$$

$$g'(s_0)s'_0 + f'(s_0)s_1 + f(s_0)c_1 + \Lambda(s_0) = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = \Lambda'(s_0)s_1 + \Lambda(s_0)c_1. \quad (11)$$

Выразим c_1 из уравнения (10)

$$c_1 = -\frac{g'(s_0)s'_0 + f'(s_0)s_1 + \Lambda(s_0)}{f(s_0)}, \quad (12)$$

и подставим в (11). Получим уравнение

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = P(s_0)s_1 - Q(s_0). \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P(s_0) &= \frac{\Lambda'(s_0)f(s_0) - \Lambda(s_0)f'(s_0)}{f(s_0)}; \\ Q(s_0) &= (g'(s_0) + 1) \frac{\Lambda^2(s_0)}{f(s_0)}. \end{aligned}$$

Определим начальные условия для уравнений (9), (13). Разложим начальную функцию (6) в ряд по степеням x :

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + p_1x + O(x^2), \\ p_0 &= p(0), \quad p_1 = p'(0). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя разложения (7), (14) в условие (6) и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях x , получаем

$$s_0|_{t=t_\Gamma(x)} = p(x). \quad (15)$$

$$s_1|_{t=t_\Gamma(x)} = 0. \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (9) с начальным условием (15), находим решение $s_0(x, t)$ в неявном виде:

$$\int_{p(x)}^{s_0} \frac{dS}{\Lambda(S)} = t - t_\Gamma(x). \quad (17)$$

В частности, концентрация осадка на входе фильтра $x = 0$ определяется из соотношения

$$\int_{p(0)}^{s_0(0,t)} \frac{dS}{\Lambda(S)} = t. \quad (18)$$

Формула (18) задает точное решение на входе фильтра.

Решение задачи (13), (16)

$$s_1 = - \int_{t_\Gamma(x)}^t e^{\int_{t_\Gamma(x)}^\tau P(s_0(x, \tau)) d\tau} Q(s_0(x, \zeta)) d\zeta. \quad (19)$$

Функция c_1 определяется по формуле (12) при известных значениях s_0, s_1 .

Формулы (12), (17), (19) задают старшие члены асимптотики (7) в области Ω_s . Данные разложения удовлетворяют уравнениям (1), (2) и условиям (3), (6) с точностью $O(x^2)$.

Для определения асимптотики подвижной границы Γ раздела двух фаз подставим в подынтегральную функцию (5) разложения (8), (14). Имеем

$$\begin{aligned}\frac{g(p(y))}{f(p(y))} &= \frac{g(p_0) + g'(p_0)p_1y + O(y^2)}{f(p_0) + f'(p_0)p_1y + O(y^2)} = \\ &= \frac{g(p_0)}{f(p_0)} + \frac{\delta p_1 y}{f^2(p_0)} + O(y^2).\end{aligned}$$

Здесь $\delta = g'(p_0)f(p_0) - g(p_0)f'(p_0)$.

Интегрируя, находим

$$t_\Gamma(x) = \frac{g(p_0)}{f(p_0)}x + \frac{\delta p_1 x^2}{2f^2(p_0)} + O(x^3). \quad (20)$$

Обращая формулу (20), получаем обратную зависимость

$$x_\Gamma(t) = \frac{f(p_0)}{g(p_0)}t \left(1 - \frac{\delta p_1 t}{2g^2(p_0)} \right) + O(t^3). \quad (21)$$

Пример. Рассмотрим простую систему (1), (2) с постоянными коэффициентами

$$g(S) = f(S) = 1$$

и линейным коэффициентом фильтрации

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (a - bS)C, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (23)$$

Граница Γ является прямой линией $t = x$.

В области Ω_S члены асимптотики задачи (22), (23) с условиями (15), (16) имеют вид

$$s_0(t) = \frac{a - (a - bp(x))e^{-b(t-x)}}{b}; \quad (24)$$

$$c_1(t) = -(a - bp_0)e^{-b(t-x)}; \quad (25)$$

$$s_1(t) = -\frac{(a - bp_0)^2}{b}(1 - e^{-b(t-x)})e^{-b(t-x)}. \quad (26)$$

Асимптотика данной задачи без первоначального осадка построена в [18].

4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ АСИМПТОТИКИ

Расчет асимптотики задачи (22), (23) выполнен при $a = b = 1$; $p_0 = 0.5$; $p_1 = -0.25$. Графики зависимости концентраций взвешенных и осажденных частиц от времени на рис. 1, 2 построены при $x = 0$ (сплошная линия), $x = 0.25$ (прерывистая линия), $x = 0.5$ (пунктир). На рис. 1 горизонтальная линия $S = 1$ отвечает предельному максимальному значению осадка.

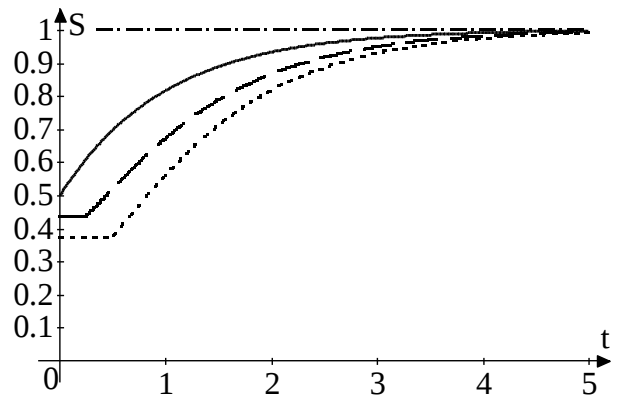


Рисунок 1. Концентрация осадка $S(x_0, t)$.

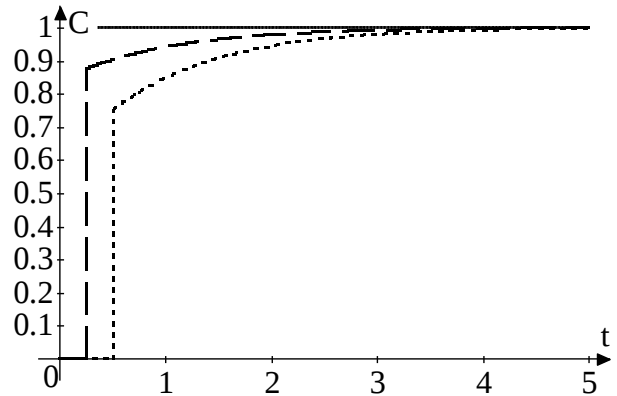


Рисунок 2. Концентрация взвеси $C(x_0, t)$.

На рис. 3, 4 изображены графики зависимости концентраций взвешенных и осажденных частиц от расстояния x до входа фильтра при $t = 0$ (сплошная линия), $t = 0.5$ (прерывистая линия), $t = 1$ (пунктир), $t = 2$ (точка-тире).

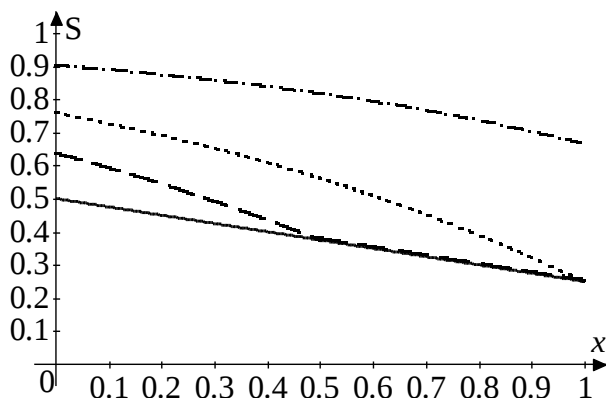


Рисунок 3. Концентрация осадка $S(x, t_0)$.

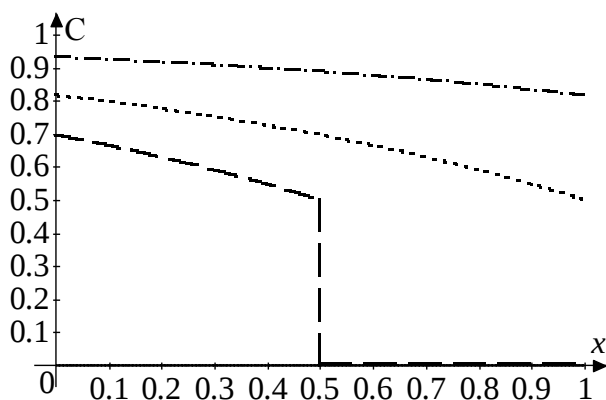


Рисунок 4. Концентрация взвеси $C(x, t_0)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена асимптотика задачи фильтрации суспензии в пористой среде с первоначальным осадком вблизи входа фильтра. На подвижной границе раздела двух фаз концентрация взвешенных частиц имеет разрыв; концентрация осажденных частиц непрерывна и теряет гладкость (рис. 1-4).

В случае блокирующего коэффициента фильтрации $\Lambda(S) > 0$, $0 \leq S < S_{\max}$; $\Lambda(S) = 0$, $S \geq S_{\max}$ при неограниченном увеличении времени t концентрации $C(x, t) \rightarrow C(0, t) = 1$, $S(x, t) \rightarrow S_{\max}$. Для рассматриваемого примера $S_{\max} = a/b = 1$ (см. рис. 1, 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ramachandran V., Fogler H.S.** Plugging by hydrodynamic bridging during flow of stable colloidal particles within cylindrical pores. // *Journal of Fluid Mechanics*, 385 (1999) 129-156.
2. **Schausberger P., Norazman N., Li H., Chen V., Friedl A.** Simulation of protein ultrafiltration using CFD: Comparison of concentration polarisation and fouling effects with filtration and protein adsorption experiments. // *Journal of Membrane Science*, 337 (2009) 1-8.
3. **Mays D.C., Hunt J.R.** Hydrodynamic aspects of particle clogging in porous media, *Environmental Science and Technology*, 39 (2005) 577-584.
4. **Bradford S.A., Torkzaban S., Shapiro A.A.** A theoretical analysis of colloid attachment and straining in chemically heterogeneous porous media, *Langmuir*, 29 (2013) 6944-6952.
5. **Polyakov Y.S., Zydney A.L.** Ultrafiltration membrane performance: Effects of pore blockage/constriction. // *Journal of Membrane Science*, 434 (2013) 106-120.
6. **Santos A., Bedrikovetsky P., Fontoura S.** Analytical micro model for size exclusion: Pore blocking and permeability reduction, *Journal of Membrane Science*, 308 (2008) 115-127.
7. **Bashtani F., Ayatollahi S., Habibi A., Masihi M.** Permeability reduction of membranes during particulate suspension flow; analytical micro model of size exclusion mechanism. // *Journal of Membrane Science*, 435 (2013) 155-164.
8. **Herzig J.P., Leclerc D.M., Legoff P.** Flow of suspensions through porous media - application to deep filtration. // *Industrial and Engineering Chemistry*, 62 (1970) 8-35.
9. **Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D.** New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass

- transfer. // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 41(5), (2007), 556-564.
10. **You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media, *Abstract and Applied Analysis*, 2013 (2013) 1-9.
11. **Polyanin A.D., Zaitsev V.F.** Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed., CRC Press, Hoboken, 2011.
12. **You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.** Asymptotic model for deep bed filtration. // *Chemical Engineering Journal*, 258, (2014), 374-385.
13. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic model of filtration in almost stationary mode. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 12(1) (2016) 158-163.
14. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit. // *Procedia Engineering*, 111 (2015) 491-494.
15. **Sefrioui N., Ahmadi A., Omari A., Bertin H.** Numerical simulation of retention and release of colloids in porous media at the pore scale. // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 427 (2013) 33-40.
16. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with Changing Flow Direction. // *Procedia Engineering*, 153 (2016) 157-161.
17. **Galaguz Y.P., Safina G.L.** Modeling of fine migration in a porous medium. // *MATEC Web of Conferences*, 86 (2016) 03003.
18. **Kuzmina L.I., Osipov Yu.V.** Particle transportation at the filter inlet. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 10(3) (2014) 17-21.

верситет «Высшая школа экономики»; 101000, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, тел. +7(495) 77295 90 *15219; E-mail: lkuzmina@hse.ru;

Осипов Юрий Викторович, доцент, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(499)1835994; E-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Ludmila I. Kuzmina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research University Higher School of Economics, 101000, Russia, Moscow, Myasnitskaya st., 20; Phone +7(495) 77295 90 * 15219; E-mail: lkuzmina@hse.ru.

Yuri V. Osipov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Russia, Moscow, Yaroslavskoe Shosse, 26; Phone +7(499)1835994; E-mail: yuri-osipov@mail.ru.

Кузьмина Людмила Ивановна, доцент, кандидат физико-математических наук, Департамент прикладной математики, Национальный исследовательский уни-

ДВУХЭТАПНЫЙ СЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНОГО БАЗИСА ХААРА

М.Л. Мозгалева

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: Настоящая статья посвящена построению численного метода, который можно разделить на два основных этапа. На первом этапе дискретная задача решается на грубой сетке, где количество узлов по каждому направлению одинаковое и является степенью 2. Затем количество узлов в каждом направлении увеличивается вдвое и полученное решение на грубой сетке с помощью дискретного базиса Хаара определяется в узлах мелкой сетки в качестве начального приближения. На втором этапе, используя наиболее подходящий итерационный метод, получаем решение в узлах мелкой сетки. В статье рассматриваются тестовые примеры решения краевых задач в одномерной, двумерной и трехмерной постановке.

Ключевые слова: краевая задача, дискретная постановка, дискретный базис Хаара, итерационные методы

TWO-STAGE GRID METHOD OF SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS WITH THE USE OF DISCRETE HAAR BASIS

Marina L. Mozgaleva

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: The distinctive paper is devoted to development of two-stage numerical method. At the first stage, the discrete problem is solved on a coarse grid, where the number of nodes in each direction is the same and is a power of 2. Then the number of nodes in each direction is doubled and the resulting solution on a coarse grid using a discrete Haar basis is defined at the nodes of the fine grid as the initial approximation. At the second stage, we obtain a solution in the nodes of the fine grid using the most appropriate iterative method. Test examples of the solution of one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional boundary problems are under consideration.

Key words: boundary problems, discrete formulation, discrete Haar basis, iterative methods

1. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

где $N_0 = N$ – четное;

Предварительные построения.

Пусть задан отрезок длиной L . Нанесем на него одномерную сетку, состоящую из N узлов. Сеточную векторную функцию $\bar{u} = [u_1, \dots, u_N]^T$ можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_0} u_j^0 \bar{\Phi}_j^0, \quad (1)$$

$$u_j^0 = u_j, \quad 1 \leq j \leq N;$$

$$\bar{\Phi}_j^0(i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

– j -й вектор единичного базиса или дискретного базиса Хаара 0-го уровня,
 $1 \leq j \leq N_0 = N, \quad 1 \leq i \leq N.$

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе Хаара первого уровня в виде [1-21]

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 + \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_j^1, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= N/2; \\ u_j^1 &= (\bar{u}, \bar{\Phi}_j^1), \quad v_j^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_j^1), \quad 1 \leq j \leq N_1; \\ \bar{\Phi}_j^1 &= \alpha(\bar{\Phi}_{2j-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j}^0); \end{aligned}$$

– j-й аппроксимирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j \leq N_1$

$$\bar{\Psi}_j^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2j-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j}^0);$$

– j-й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j \leq N_1$;

$$\alpha = 1/\sqrt{2}$$

– нормирующий коэффициент.

Исходя из представления (2) сеточная функция $\bar{u}$ представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке первого уровня, состоящей из N_1 – узлов, а второе слагаемое называется детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке первого уровня.

Представление (2) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0, \quad (3)$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} u_j^1 \bar{\Phi}_j^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}, \quad (4)$$

$$\bar{v}_1^0 = \sum_{j=1}^{N_1} v_j^1 \bar{\Psi}_j^1 = \Psi_1 \Psi_1^T \bar{u}, \quad (5)$$

где $\Phi_1 = [\bar{\Phi}_1^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1}^1]$ и $\Psi_1 = [\bar{\Psi}_1^1, \dots, \bar{\Psi}_{N_1}^1]$

– матрицы размером $N \times N_1$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса Хаара первого уровня.

В силу ортонормированности базиса Хаара операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T \quad \text{и} \quad P_\Psi = \Psi_1 \Psi_1^T \quad (6)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке первого уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

Схема построения двухэтапного сеточного метода решения

Пусть системы линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (7)$$

$$A_1 \bar{u}^1 = \bar{f}^1 \quad (8)$$

являются дискретными аналогами некоторого операторного уравнения, определенного на заданном отрезке порядка N и $N_1 = N/2$, соответственно.

Находим решение системы (8). И затем ищем решение системы (7) в виде аппроксимации первого уровня в базисе Хаара

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad (9)$$

где

$$\bar{u}^1 = [u_1^1, \dots, u_{N_1}^1]^T.$$

Здесь деление на нормирующий коэффициент α вызвано следующим фактом.

– Когда известно решение на 0-ом уровне, тогда аппроксимация

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}$$

проходит покомпонентно по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(2j-1) &= \bar{u}_1^0(2j) = \frac{u(2j-1) + u(2j)}{2}, \\ 1 &\leq j \leq N_1 \end{aligned}$$

при этом деление на 2 – это умножение на величину $\alpha^2 = 1/2$, содержащуюся в проекторе $\Phi_1 \Phi_1^T$, где $\alpha = 1/\sqrt{2}$ является нормирующим коэффициентом для каждого сомножителя. Если происходит наоборот, т.е. известно решение на первом уровне, тогда аппроксимация представлена в виде

$$\bar{u}_1^0(2j-1) = \bar{u}_1^0(2j) = \bar{u}^1(j), \quad 1 \leq j \leq N_1$$

Начальное приближение решения системы (7) представим в виде

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0, \quad (10)$$

где $\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha$;
 $\bar{v}_1^0 = \Psi_1 \bar{v}^1, \quad \bar{v}^1 = [v_1^1, \dots, v_{N_1}^1]^T$

– требуется найти

Подставляем (10) в систему (7):

$$A \bar{u}_1^0 + A \Psi_1 \bar{v}^1 = \bar{f}, \quad (11)$$

Умножаем уравнение (11) слева на Ψ_1^T и переносим в правую часть известные величины. В итоге получаем систему уравнений порядка $N_1 = N/2$ относительно $\bar{v}^1$

$$A_v \bar{v}^1 = \bar{f}_v, \quad (12)$$

где $A_v = \Psi_1^T A \Psi_1, \quad \bar{f}_v = \Psi_1^T \bar{f} - \Psi_1^T A \bar{u}_1^0$.

Затем строим итерационный процесс:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0 \\ \bar{u}_{k+1} = \varphi(\bar{u}_k) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где φ – заданный каким-либо образом оператор итерационного процесса.

Пример расчета – численное решение краевой задачи о поперечном изгибе балки Бернулли.

Постановка задачи. В качестве модельного примера рассмотрим балку на упругом осно-

вании со следующими параметрами (см. рис. 1): $L=8$ м – длина; $h=1.3$ м, $b=1$ м – высота и ширина поперечного сечения, соответственно; $E = 2560 \cdot 10^4$ кН/м² – модуль упругости; $P = 100$ кН – нагрузка, заданная в средней точке, $P_h = 100/h_b$; $k = 75 \cdot 10^3$ кН/м³ – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера; $\bar{k} = k \cdot b$, $J = bh^3/12$.

Определение прогиба балки Бернулли сводится, к решению краевой задачи:

$$y^{(4)}(x) + 4\alpha^4 y(x) = F(x), \quad 0 < x < L, \quad (14)$$

$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0 \\ y(L) = y''(L) = 0 \end{cases} \quad \text{– краевые условия} \quad (15)$$

где $4\alpha^4 = \frac{\bar{k}}{EJ}$; $F = \frac{P}{EJ} \delta(x - \frac{L}{2})$.

Дискретное решение задачи. Разбиваем отрезок $(0, L)$ на равные части с шагом h_b (см. рис. 2).

Если n – общее количество точек, то очевидно, что

$$h_b = L/(n-1). \quad (16)$$

Далее переходим от решения краевой задачи (14)-(15) к решению системы разностных уравнений $A \bar{y} = \bar{f}$, подробно представленных с учетом краевых условий (15) в виде:

$$\begin{aligned} \underline{i=1}: & y_1 = f_1 \\ \underline{i=2}: & -2y_1 + (5 + 4h_b^4 \alpha^4) y_2 - 4y_3 + y_4 = f_2 \\ \underline{2 < i < n-1}: & \\ & y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + 4h_b^4 \alpha^4) y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = f_i \quad (17) \\ \underline{i=n-1}: & \\ & y_{n-3} - 4y_{n-2} + (5 + 4h_b^4 \alpha^4) y_{n-1} - 2y_n = f_{n-1} \\ \underline{i=n}: & y_n = f_n \end{aligned}$$

где $x_i = h_b(i-1)$; $y_i = y(x_i)$;

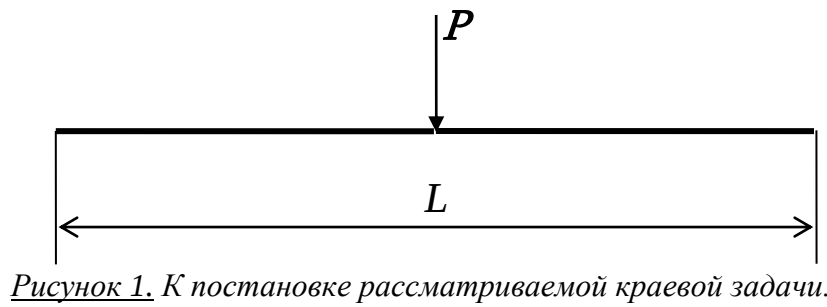


Рисунок 1. К постановке рассматриваемой краевой задачи.

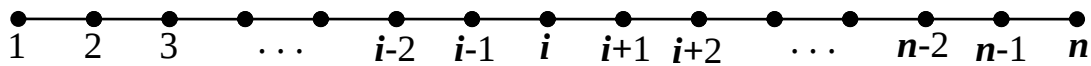


Рисунок 2. Дискретная аппроксимация области.

$$f_i = \begin{cases} 0, & i=1 \\ h_b^4[F(x_i)/h_b], & 2 \leq i \leq n-1 \\ 0, & i=n \end{cases}$$

Итерационный процесс:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_1^0 \\ \bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k - \tau(A\bar{u}_k - \bar{f}) \end{cases}, \quad k=0,1,\dots \quad (18)$$

где $\tau = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$

– итерационный параметр; $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное, соответственно, собственное значение матрицы A . Если

$$\|\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k\| < \varepsilon,$$

где величина $\varepsilon > 0$ – заданная точность (достаточно малая величина), тогда

$$\bar{y} \approx \bar{u}_{k+1}$$

– окончательное приближение решения системы (17). По результатам расчета при $N=32$ построены сравнительные графики прогибов. На рис. 3 – сравнение точного решения в единичном базисе y с начальным приближением u_0 , построенного по форму-

ле (10). На рис. 4 – y в сравнении с u_k – окончательным приближением.

2. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ.

Предварительные построения.

Пусть задан прямоугольник со сторонами длиной L_1 и L_2 в направлении x_1 и x_2 , соответственно. Нанесем на него прямоугольную сетку разбив каждую сторону прямоугольника на $(N-1)$ -частей. Таким образом, сеточная область будет содержать N^2 узлов. Сеточную векторную функцию

$$\bar{u} = [u_{11}, \dots, u_{1N}, \dots, u_{N1}, \dots, u_{NN}]^T$$

можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j_2=1}^{N_0} \sum_{j_1=1}^{N_0} u_{j_2 j_1}^0 \bar{\Phi}_{j_2 j_1}^0, \quad (19)$$

где $N_0 = N - \text{четное};$

$$u_{j_2 j_1}^0 = u_{j_2 j_1}, \quad 1 \leq j_1, j_2 \leq N$$

$$\bar{\Phi}_{j_2 j_1}^0(i_2, i_1) = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2 \\ 0, & \neg(i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2) \end{cases}$$

– (j_2, j_1) -й вектор единичного базиса или дискретного базиса Хаара 0-го уровня, $1 \leq j_2, j_1 \leq N_0 = N, \quad 1 \leq i_2, i_1 \leq N$.

Двухэтапный сеточный метод решения краевых задач строительной механики на основе использования дискретного базиса Хаара

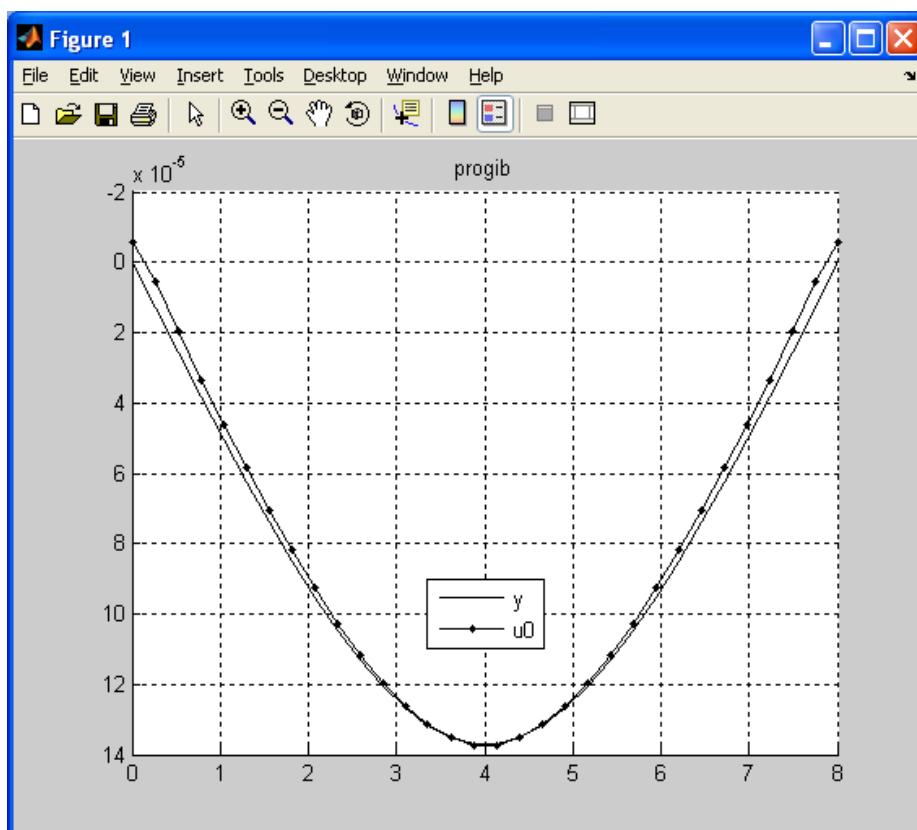


Рисунок 3. Сравнение точного результата с начальным приближением.

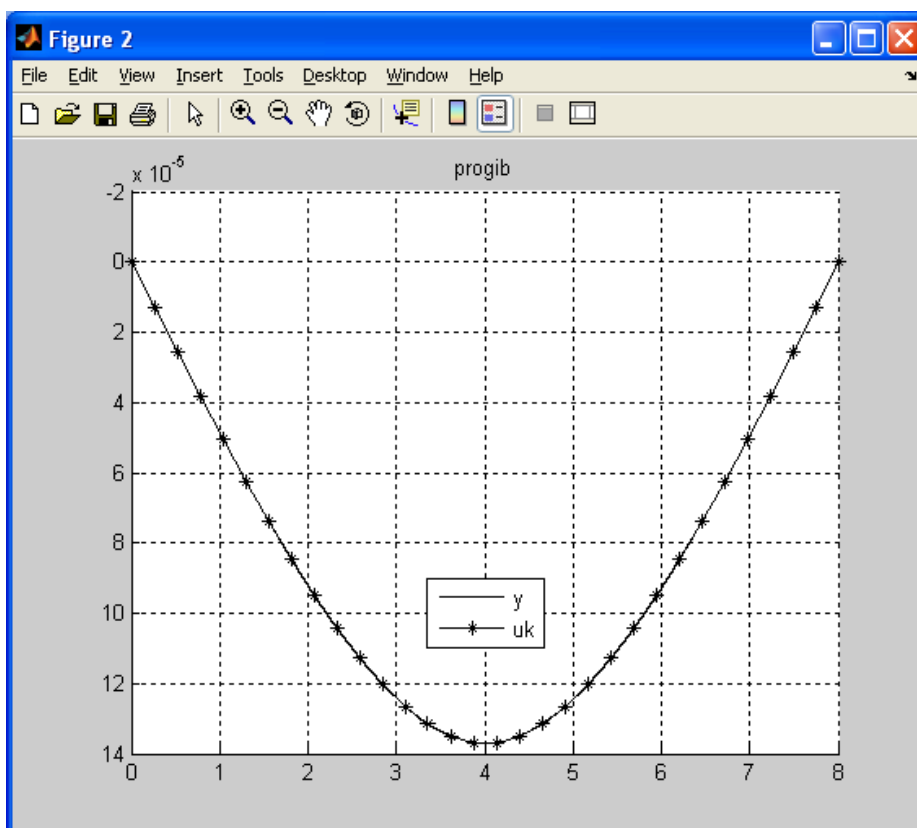


Рисунок 4. Сравнение точного результата с окончательным приближением.

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе Хаара первого уровня в виде [1-21]

$$\bar{u} = \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} u_{j_2 j_1}^1 \bar{\Phi}_{j_2 j_1}^1 + \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{1 j_2 j_1}^1 \bar{\Psi}_{1 j_2 j_1}^1 + \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{2 j_2 j_1}^1 \bar{\Psi}_{2 j_2 j_1}^1 + \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{3 j_2 j_1}^1 \bar{\Psi}_{3 j_2 j_1}^1, \quad (20)$$

где $N_1 = N/2$, $u_{j_2 j_1}^1 = (\bar{u}, \bar{\Phi}_{j_2 j_1}^1)$,

$v_{1 j_2 j_1}^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{1 j_2 j_1}^1)$, $v_{2 j_2 j_1}^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{2 j_2 j_1}^1)$.

$v_{3 j_2 j_1}^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{3 j_2 j_1}^1)$,

$$\bar{\Phi}_{j_2 j_1}^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2 j_2-1, 2 j_1-1}^0 + \bar{\Phi}_{2 j_2-1, 2 j_1}^0 + \bar{\Phi}_{2 j_2, 2 j_1-1}^0 + \bar{\Phi}_{2 j_2, 2 j_1}^0)$$

– (j_2, j_1) -й аппроксимирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j_2, j_1 \leq N_1$;

$$\bar{\Psi}_{1 j_2 j_1}^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2 j_2-1, 2 j_1-1}^0 - \bar{\Phi}_{2 j_2-1, 2 j_1}^0 + \bar{\Phi}_{2 j_2, 2 j_1-1}^0 - \bar{\Phi}_{2 j_2, 2 j_1}^0)$$

– $(1, j_2, j_1)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\bar{\Psi}_{2 j_2 j_1}^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2 j_2-1, 2 j_1-1}^0 + \bar{\Phi}_{2 j_2-1, 2 j_1}^0 - \bar{\Phi}_{2 j_2, 2 j_1-1}^0 - \bar{\Phi}_{2 j_2, 2 j_1}^0)$$

– $(2, j_2, j_1)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\bar{\Psi}_{3 j_2 j_1}^1 = \alpha(\bar{\Phi}_{2 j_2-1, 2 j_1-1}^0 - \bar{\Phi}_{2 j_2-1, 2 j_1}^0 - \bar{\Phi}_{2 j_2, 2 j_1-1}^0 + \bar{\Phi}_{2 j_2, 2 j_1}^0)$$

– $(3, j_2, j_1)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара 1-го уровня, $1 \leq j_2, j_1 \leq N_1$, $\alpha = 1/2$ – нормирующий коэффициент.

Исходя из представления (20) сеточная функция $\bar{u}$ представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке 1-го уровня, состоящей из N_1^2 – узлов, а другие три слагаемых называются детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке 1-го уровня.

Представление (20) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_{11}^0 + \bar{v}_{21}^0 + \bar{v}_{31}^0, \quad (21)$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} u_{j_2 j_1}^1 \bar{\Phi}_{j_2 j_1}^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}, \quad (22)$$

$$\bar{v}_{k1}^0 = \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{k j_2 j_1}^1 \bar{\Psi}_{k j_2 j_1}^1 = \Psi_k \Psi_k^T \bar{u}, \quad k=1, 2, 3 \quad (23)$$

где $\Phi_1 = [\bar{\Phi}_{11}^1, \dots, \bar{\Phi}_{1N_1}^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1 1}^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1 N_1}^1]$;

$\Psi_k = [\bar{\Psi}_{k11}^1, \dots, \bar{\Psi}_{k1N_1}^1, \dots, \bar{\Psi}_{kN_1 1}^1, \dots, \bar{\Psi}_{kN_1 N_1}^1]$,

$k=1, 2, 3$

– матрицы размером $N^2 \times N_1^2$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса Хаара 1-го уровня.

В силу ортонормированности базиса Хаара операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T \quad \text{и} \quad P_{\Psi_k} = \Psi_k \Psi_k^T, \quad k=1, 2, 3 \quad (24)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке 1-го уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

Схема построения двухэтапного сеточного метода решения

Пусть системы линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (25)$$

$$A_1 \bar{u}^1 = \bar{f}^1 \quad (26)$$

являются дискретными аналогами некоторого операторного уравнения, определенного на заданном прямоугольнике порядка N^2 и $N_1^2 = (N/2)^2$, соответственно.

Находим решение системы (26). И затем ищем решение системы (25) в виде аппроксимации первого уровня в базисе Хаара

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad (27)$$

где $\bar{u}^1 = [u_{11}^1, \dots, u_{1N_1}^1, \dots, u_{N_11}^1, \dots, u_{N_1N_1}^1]^T$.

Здесь деление на нормирующий коэффициент α вызвано следующим фактом.

– Когда известно решение на 0-ом уровне, тогда аппроксимация

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}$$

проходит покомпонентно по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1) &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1) = \\ \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1) &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1) = \\ &= (\bar{u}(2j_2 - 1, 2j_1 - 1) + \bar{u}(2j_2 - 1, 2j_1) + \\ &+ \bar{u}(2j_2, 2j_1 - 1) + \bar{u}(2j_2, 2j_1)) / 4, \\ &1 \leq j_2, j_1 \leq N_1 \end{aligned}$$

при этом деление на 4 – это умножение на величину $\alpha^2 = 1/4$, содержащуюся в проекторе $\Phi_1 \Phi_1^T$, где $\alpha = 1/2$ является нормирующим коэффициентом для каждого сомножителя

– Если происходит наоборот, т.е. известно решение на первом уровне, тогда аппроксимация представлена в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1) &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1) = \\ \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1) &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1) = \\ &= \bar{u}^1(j_2, j_1), \quad 1 \leq j_2, j_1 \leq N_1 \end{aligned}$$

Начальное приближение решения системы (25) представим в виде

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_{11}^0 + \bar{v}_{21}^0 + \bar{v}_{31}^0, \quad (28)$$

где $\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha$, $\bar{v}_{k1}^0 = \Psi_{k1} \bar{v}_k^1$,
 $\bar{v}_k^1 = [v_{k11}^1, \dots, v_{k1N_1}^1, \dots, v_{kN_11}^1, \dots, v_{kN_1N_1}^1]^T$, $k = 1, 2, 3$

– требуется найти.

Подставляем (28) в систему (25):

$$A \bar{u}_1^0 + A \Psi_{11} \bar{v}_1^1 + A \Psi_{21} \bar{v}_2^1 + A \Psi_{31} \bar{v}_3^1 = \bar{f}, \quad (29)$$

Умножаем уравнение (29) слева поочередно на Ψ_{11}^T , Ψ_{21}^T , Ψ_{31}^T и перебрасываем в правую часть известные величины. В итоге получаем систему уравнений порядка $3N_1^2$ относительно $\bar{v}^1 = [\bar{v}_1^1 \quad \bar{v}_2^1 \quad \bar{v}_3^1]^T$

$$A_v \bar{v}^1 = \bar{f}_v, \quad (30)$$

$$\text{где } A_v = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

– блочная матрица;

$$A_{ij} = \Psi_{i1}^T A \Psi_{j1}$$

– матрицы размером N_1^2 , $i, j = 1, 2, 3$

$$\bar{f}_v = [\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2 \quad \bar{f}_3]^T$$

– блочный вектор правой части,

$$\bar{f}_i = \Psi_{i1}^T \bar{f} - \Psi_{i1}^T A \bar{u}_1^0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решение системы (30) можно проводить по методу Гаусса, используя блочную структуру матрицы и вектора правой части.

Расширенная матрица

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \bar{f}_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \bar{f}_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \bar{f}_3 \end{array} \right]$$

Прямой ход

1-й шаг: $A_{ij}^1 = A_{ij} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j}$, $j = 1, 2, 3$,

$\bar{f}_i^1 = \bar{f}_i - A_{i1}A_{11}^{-1}\bar{f}_1$, $i = 2, 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \bar{f}_1 \\ 0 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & \bar{f}_2^1 \\ 0 & A_{32}^1 & A_{33}^1 & \bar{f}_3^1 \end{array} \right]$$

2-й шаг: $A_{3j}^2 = A_{3j}^1 - A_{32}^1(A_{22}^1)^{-1}A_{2j}^1$, $j = 2, 3$,

$\bar{f}_3^2 = \bar{f}_3^1 - A_{32}^1(A_{22}^1)^{-1}\bar{f}_2^1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \bar{f}_1 \\ 0 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & \bar{f}_2^1 \\ 0 & 0 & A_{33}^2 & \bar{f}_3^2 \end{array} \right]$$

Обратный ход

$$\bar{v}_3^1 = (A_{33}^2)^{-1}\bar{f}_3^2$$

$$\bar{v}_2^1 = (A_{22}^1)^{-1}(\bar{f}_2^1 - A_{23}^1\bar{v}_3^1)$$

$$\bar{v}_1^1 = (A_{11})^{-1}(\bar{f}_1 - A_{12}\bar{v}_2^1 - A_{13}\bar{v}_3^1)$$

Таким образом, решаем систему (30), оперируя матрицами и векторами порядка N_1^2

Затем строим итерационный процесс:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_{11}^0 + \bar{v}_{21}^0 + \bar{v}_{31}^0, \\ \bar{u}_{k+1} = \varphi(\bar{u}_k) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (31)$$

где φ – заданный каким-либо образом оператор итерационного процесса.

Пример расчета – численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Постановка задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = F, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (32)$$

$$U_\Gamma = \varphi(x_1, x_2), \quad \text{– краевые условия} \quad (33)$$

где $F(x_1, x_2) = -4P$, $P = 1$;

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < L_1 \wedge 0 < x_2 < L_2\}$$

– прямоугольник, $L_1 = 1.4$, $L_2 = 1.4$;

$$\varphi(x_1, x_2) = Px_1(L_1 - x_1) + Px_2(L_2 - x_2)$$

Численное решение задачи методом конечных разностей.

Разбиваем исходную область на $(N-1)$ -частей по каждому направлению.

$$h_1 = \frac{L_1}{(N-1)}, \quad h_2 = \frac{L_2}{(N-1)}$$

– шаги разбиения по 1-му и 2-му направлениям, соответственно; (i_2, i_1) – мультииндекс сеточного узла с координатами (x_{i_1}, x_{i_2}) , где

$$x_{i_1} = h_1(i_1 - 1), \quad x_{i_2} = h_2(i_2 - 1), \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq N;$$

$u_{i_2 i_1} = u(x_{i_1}, x_{i_2})$ – значение неизвестной функции u в (i_2, i_1) -узле сетки.

Аппроксимируем вторые производные разностями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)_{i_2 i_1} &= \frac{u_{i_2, i_1-1} - 2u_{i_2 i_1} + u_{i_2, i_1+1}}{h_1^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)_{i_2 i_1} &= \frac{u_{i_2-1, i_1} - 2u_{i_2 i_1} + u_{i_2+1, i_1}}{h_2^2} \end{aligned} \quad (34)$$

В результате исходная краевая задача (32)-(33) переходит в систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $u_{i_2 i_1}$. Ниже представлены разрешающие уравнения для граничных и внутренних узлов сетки (i_2, i_1) :

граничные узлы:

$$u_{i_2 i_1} = \varphi(x_{i_1}, x_{i_2}), \quad (35)$$

внутренние узлы:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i_2, i_1-1} - 2u_{i_2 i_1} + u_{i_2, i_1+1}}{h_1^2} + \frac{u_{i_2-1, i_1} - 2u_{i_2 i_1} + u_{i_2+1, i_1}}{h_2^2} \\ = F(x_{i_1}, x_{i_2}), \end{aligned} \quad (36)$$

Векторно-матричное представление системы (35)-(36):

$$A\bar{u} = \bar{f}, \quad (37)$$

$\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное, соответственно, собственное значение матрицы A .
Если

Итерационный процесс.

$$\|\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k\| < \varepsilon,$$

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \bar{v}_{11}^0 + \bar{v}_{21}^0 + \bar{v}_{31}^0 \\ \bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k - \tau(A\bar{u}_k - \bar{f}) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (38)$$

где величина $\varepsilon > 0$ – заданная точность (достаточно малая величина), тогда

$$\bar{u} \approx \bar{u}_{k+1}$$

где $\bar{u}_0$ – начальное приближение, представленное формулой (28), было дополнительно подкорректировано: используя краевые условия (33), в граничных узлах были заданы значения неизвестной функции,

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

– итерационный параметр,

– окончательное приближение решения системы (37).

Далее приведены данные точного решения исходной системы, начального приближения, построенного по формуле (28) и конечного приближения по итерационной схеме. (Для удобства представления расчет проводился при $N = 8$).

Таблица 1. Точное решение в единичном базисе U .

0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4000	0.6400	0.8000	0.8800	0.8800	0.8000	0.6400	0.4000
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.4000	0.6400	0.8000	0.8800	0.8800	0.8000	0.6400	0.4000
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0

Таблица 2. Начальное приближение решения на исходной сетке в единичном базисе $U0$.

0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0
0.2400	0.2961	0.5256	0.6314	0.6314	0.5256	0.2961	0.2400
0.4000	0.5256	0.7566	0.8701	0.8701	0.7566	0.5256	0.4000
0.4800	0.6314	0.8701	0.9876	0.9876	0.8701	0.6314	0.4800
0.4800	0.6314	0.8701	0.9876	0.9876	0.8701	0.6314	0.4800
0.4000	0.5256	0.7566	0.8701	0.8701	0.7566	0.5256	0.4000
0.2400	0.2961	0.5256	0.6314	0.6314	0.5256	0.2961	0.2400
0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0

Таблица 3. Окончательное приближение решения на исходной сетке в единичном базисе Uk .

0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4000	0.6400	0.8000	0.8800	0.8800	0.8000	0.6400	0.4000
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.4000	0.6400	0.8000	0.8800	0.8800	0.8000	0.6400	0.4000
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0	0.2400	0.4000	0.4800	0.4800	0.4000	0.2400	0

3. ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ.

Предварительные построения.

Пусть задан прямоугольный параллелепипед с ребрами длиной L_1 , L_2 и L_3 в направлении x_1 , x_2 и x_3 , соответственно. Нанесем на нее прямоугольную сетку разбив каждое ребро на $(N-1)$ -частей. Таким образом, сеточная область будет содержать N^3 узлов. Сеточную векторную функцию

$$\bar{u} = [u_{111}, \dots, u_{1,N,1}, \dots, u_{N,N,1}, \dots, u_{NNN}]^T$$

можно представить в виде

$$\bar{u} = \sum_{j_3=1}^{N_0} \sum_{j_2=1}^{N_0} \sum_{j_1=1}^{N_0} u_{j_2 j_1 j_3}^0 \bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^0, \quad (39)$$

где $N_0 = N - \text{четное}$;

$$u_{j_2 j_1 j_3}^0 = u_{j_2 j_1 j_3}, \quad 1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq N;$$

$$\bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^0(i_2, i_1, i_3) = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2 \wedge i_3 = j_3 \\ 0, & \neg(i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2 \wedge i_3 = j_3); \end{cases}$$

– $j = (j_2, j_1, j_3)$ -й вектор единичного базиса или дискретного базиса Хаара 0-го уровня, $1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_0 = N$, $1 \leq i_2, i_1, i_3 \leq N$.

Одновременно эту сеточную функцию можно представить в базисе Хаара первого уровня в виде [1-21]

$$\bar{u} = \sum_{j_3=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} u_{j_2 j_1 j_3}^1 \bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^1 + \sum_{k=1}^7 \sum_{j_3=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{k, j_2 j_1 j_3}^1 \bar{\Psi}_{k, j_2 j_1 j_3}^1, \quad (40)$$

где $N_1 = N/2$, $u_{j_2 j_1 j_3}^1 = (\bar{u}, \bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^1)$,

$$v_{k, j_2 j_1 j_3}^1 = (\bar{u}, \bar{\Psi}_{k, j_2 j_1 j_3}^1), \quad k = 1, 2, \dots, 7,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{j_2 j_1 j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $j = (j_2, j_1, j_3)$ -й аппроксимирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_1$;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{1, j_2 j_1 j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(1, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{2, j_2 j_1 j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(2, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{3, j_2 j_1 j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1-1, 2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1, 2j_1, 2j_3}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1-1, 2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2, 2j_1, 2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(3, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{4,j_2,j_1,j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(4, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{5,j_2,j_1,j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3-1}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(5, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня;

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{6,j_2,j_1,j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(6, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{7,j_2,j_1,j_3}^1 = & \alpha(\bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3-1}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3-1}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3-1}^0 - \\ & - \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1-1,2j_3}^0 + \bar{\Phi}_{2j_2-1,2j_1,2j_3}^0 + \\ & + \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1-1,2j_3}^0 - \bar{\Phi}_{2j_2,2j_1,2j_3}^0) \end{aligned}$$

– $(7, j_2, j_1, j_3)$ -й детализирующий вектор дискретного базиса Хаара первого уровня, $1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_1$,

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

– нормирующий коэффициент.

Исходя из представления (40) сеточная функция $\bar{u}$ представлена в виде суммы, где первое слагаемое является ее аппроксимацией на сетке 1-го уровня, состоящей из N_1^3 – узлов, а другие семь слагаемых называются детализацией (дополнением до исходного состояния) на сетке 1-го уровня.

Преставление (40) можно записать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 \bar{v}_{k1}^0, \quad (41)$$

$$\bar{u}_1^0 = \sum_{j_3=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} u_{j_2,j_1,j_3}^1 \bar{\Phi}_{j_2,j_1,j_3}^1 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}, \quad (42)$$

$$\bar{v}_{k1}^0 = \sum_{j_3=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_1} \sum_{j_1=1}^{N_1} v_{k,j_2,j_1,j_3}^1 \bar{\Psi}_{k,j_2,j_1,j_3}^1 = \Psi_{k1} \Psi_{k1}^T \bar{u}, \quad (43)$$

$k = 1, \dots, 7$

где

$$\Phi_1 = [\bar{\Phi}_{111}^1, \dots, \bar{\Phi}_{1,N_1,1}^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1,N_1,1}^1, \dots, \bar{\Phi}_{N_1,N_1,N_1}^1]$$

$$\Psi_{k1} = [\bar{\Psi}_{k,111}^1, \dots, \bar{\Psi}_{k,1,N_1,1}^1, \dots, \bar{\Psi}_{k,N_1,N_1,1}^1, \dots, \bar{\Psi}_{k,N_1,N_1,N_1}^1]$$

$k = 1, \dots, 7$

– матрицы размером $N^3 \times N_1^3$, столбцами которых являются, соответственно, аппроксимирующие и детализирующие векторы дискретного базиса Хаара 1-го уровня.

В силу ортонормированности базиса Хаара операторы

$$P_\Phi = \Phi_1 \Phi_1^T \quad \text{и} \quad P_{\Psi_k} = \Psi_{k1} \Psi_{k1}^T, \quad k = 1, \dots, 7 \quad (44)$$

являются проекторами пространства векторных функций исходной сетки на пространство их аппроксимации на сетке 1-го уровня и его дополнения (детализирующая составляющая) до исходного состояния, соответственно.

Схема построения двухэтапного сеточного метода решения

Пусть системы линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (45)$$

$$A\bar{u}^1 = \bar{f}^1 \quad (46)$$

являются дискретными аналогами некоторого операторного уравнения, определенного на заданном прямоугольном параллелепипеде порядка N^3 и $N_1^3 = (N/2)^3$, соответственно.

Находим решение системы (46). И затем ищем решение системы (45) в виде аппроксимации 1-го уровня в базисе Хаара

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad (47)$$

где $\bar{u}^1 = [u_{111}^1, \dots, u_{1,N_1,1}^1, \dots, u_{N_1,N_1,1}^1, \dots, u_{N_1,N_1,N_1}^1]^T$.

Здесь деление на нормирующий коэффициент α вызвано следующим фактом.

– Когда известно решение на 0-ом уровне, тогда аппроксимация

$$\bar{u}_1^0 = \Phi_1 \Phi_1^T \bar{u}$$

проходит покомпонентно по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1, 2j_3 - 1) &= \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1, 2j_3 - 1) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1, 2j_3 - 1) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1, 2j_3 - 1) = \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1, 2j_3) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1, 2j_3) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1, 2j_3) = \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1, 2j_3) = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{s_3=0,1} \sum_{s_2=0,1} \sum_{s_1=0,1} u(2j_2 - 1 + s_2, 2j_1 - 1 + s_1, 2j_3 - 1 + s_3) \\ &\quad 1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_1 \end{aligned}$$

при этом деление на 8 – это умножение на величину $\alpha^2 = 1/8$, содержащуюся в проекторе $\Phi_1 \Phi_1^T$, где

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

является нормирующим коэффициентом для каждого сомножителя

Если происходит наоборот, т.е. известно решение на первом уровне, тогда аппроксимация представлена в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1, 2j_3 - 1) &= \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1, 2j_3 - 1) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1, 2j_3 - 1) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1, 2j_3 - 1) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1 - 1, 2j_3) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2 - 1, 2j_1, 2j_3) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1 - 1, 2j_3) = \\ &= \bar{u}_1^0(2j_2, 2j_1, 2j_3) = \bar{u}^1(j_2, j_1, j_3) \\ &\quad 1 \leq j_2, j_1, j_3 \leq N_1 \end{aligned}$$

Начальное приближение решения системы (45) представим в виде

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 \bar{v}_{k1}^0, \quad (48)$$

$$\text{где } \bar{u}_1^0 = \Phi_1 \bar{u}^1 / \alpha, \quad \bar{v}_{k1}^0 = \Psi_{k1} \bar{v}_k^1,$$

$$\bar{v}_k^1 = [v_{k,111}^1, \dots, v_{k,1,N_1,1}^1, \dots, v_{k,N_1,N_1,1}^1, \dots, v_{k,N_1,N_1,N_1}^1]^T,$$

$k = 1, \dots, 7$ – требуется найти.

Подставляем (48) в систему (45):

$$A\bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 A\Psi_{k1} \bar{v}_k^1 = \bar{f}, \quad (49)$$

Умножаем уравнение (49) слева поочередно на $\Psi_{11}^T, \Psi_{21}^T, \dots, \Psi_{71}^T$ и перебрасываем в правую часть известные величины. В итоге получаем систему уравнений порядка $7N_1^3$ относительно $\bar{v}^1 = [\bar{v}_1^1 \quad \dots \quad \bar{v}_7^1]^T$

$$A_v \bar{v}^1 = \bar{f}_v, \quad (50)$$

$$\text{где } A_v = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{71} & \dots & A_{77} \end{bmatrix}$$

– блочная матрица;

$$A_{ij} = \Psi_{i1}^T A \Psi_{j1}$$

– матрицы размером N_1^3 , $i, j = 1, \dots, 7$;

$$\bar{f}_v = [\bar{f}_1 \quad \dots \quad \bar{f}_7]^T$$

– блочный вектор правой части,

$$\bar{f}_i = \Psi_{i1}^T \bar{f} - \Psi_{i1}^T A \bar{u}_1^0, \quad i = 1, \dots, 7.$$

Решение системы (50) можно проводить по методу Гаусса, используя блочную структуру матрицы и вектора правой части.

Прямой ход

k-й шаг: $C_{ik} = A_{ik} \cdot A_{kk}^{-1}$,

$$A_{ij} = A_{ij} - C_{ik} A_{kj}, \quad j = k+1, \dots, 7,$$

$$\bar{f}_i = \bar{f}_i - C_{ik} \bar{f}_k, \quad i = k+1, \dots, 7$$

$k = 1, \dots, 6$.

Обратный ход

$$\bar{v}_7^1 = A_{77}^{-1} \bar{f}_7$$

$$\bar{v}_i^1 = A_{ii}^{-1} (\bar{f}_i - \sum_{j=i+1}^7 A_{ij} \bar{v}_j^1), \quad i = 6, \dots, 1$$

Таким образом, решаем систему (50), оперируя матрицами и векторами порядка N_1^3 . Затем строим итерационный процесс:

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 \bar{v}_{k1}^0, & k = 0, 1, \dots \\ \bar{u}_{k+1} = \varphi(\bar{u}_k) \end{cases} \quad (51)$$

где φ – заданный каким-либо образом оператор итерационного процесса.

Пример расчета – численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
Постановка задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = F, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (52)$$

$$U_\Gamma = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \text{– краевые условия} \quad (53)$$

где $F(x_1, x_2, x_3) = -6P$, $P = 1$;

$$\Omega = \{\bar{x} : 0 < x_1 < L_1 \wedge 0 < x_2 < L_2 \wedge 0 < x_3 < L_3\},$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = 1.4;$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= Px_1(L_1 - x_1) + Px_2(L_2 - x_2) + Px_3(L_3 - x_3)$$

Численное решение задачи методом конечных разностей.

Разбиваем исходную область на $(N-1)$ -частей по каждому направлению.

$$h_1 = \frac{L_1}{(N-1)}, \quad h_2 = \frac{L_2}{(N-1)}, \quad h_3 = \frac{L_3}{(N-1)}$$

– шаги разбиения по 1, 2 и 3 направлениям, соответственно;

(i_2, i_1, i_3) – мультииндекс сеточного узла с координатами $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$, где

$$x_{i_1} = h_1(i_1 - 1), \quad x_{i_2} = h_2(i_2 - 1),$$

$$x_{i_3} = h_3(i_3 - 1), \quad 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq N;$$

$u_{i_2 i_1 i_3} = u(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ – значение неизвестной функции u в (i_2, i_1, i_3) -узле сетки.

Аппроксимируем вторые производные разностями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)_{i_2 i_1 i_3} &= \frac{u_{i_2, i_1-1, i_3} - 2u_{i_2, i_1, i_3} + u_{i_2, i_1+1, i_3}}{h_1^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)_{i_2 i_1 i_3} &= \frac{u_{i_2-1, i_1, i_3} - 2u_{i_2, i_1, i_3} + u_{i_2+1, i_1, i_3}}{h_2^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right)_{i_2 i_1 i_3} &= \frac{u_{i_2, i_1, i_3-1} - 2u_{i_2, i_1, i_3} + u_{i_2, i_1, i_3+1}}{h_3^2} \end{aligned} \quad (54)$$

В результате исходная краевая задача (52)-(53) переходит в систему линейных алгебраических уравнений относительно величин

$u_{i_2 i_1 i_3}$. Ниже представлены разрешающие уравнения для граничных и внутренних узлов сетки (i_2, i_1, i_3) :

граничные узлы : $-(1 < i_1, i_2, i_3 < N)$

$$u_{i_2 i_1 i_3} = \varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}), \quad (55)$$

внутренние узлы: $1 < i_1, i_2, i_3 < N$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i_2, i_1-1, i_3} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2, i_1+1, i_3}}{h_1^2} + \\ & \frac{u_{i_2-1, i_1, i_3} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2+1, i_1, i_3}}{h_2^2} + \\ & \frac{u_{i_2, i_1, i_3-1} - 2u_{i_2 i_1 i_3} + u_{i_2, i_1, i_3+1}}{h_3^2} = \\ & = F(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \end{aligned} \quad (56)$$

Векторно-матричное представление системы (55)-(56):

$$A\bar{u} = \bar{f}, \quad (57)$$

Итерационный процесс.

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{u}_1^0 + \sum_{k=1}^7 \bar{v}_{k1}^0, & k = 0, 1, \dots \\ \bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k - \tau(A\bar{u}_k - \bar{f}) \end{cases} \quad (58)$$

где $\bar{u}_0$ – начальное приближение, представленное формулой (48), было дополнительно подкорректировано: используя краевые условия (53), в граничных узлах были заданы значения неизвестной функции,

Таблица 4. Точное решение в единичном базисе U .

U(: , : , 7)							
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.6400	0.8800	1.0400	1.1200	1.1200	1.0400	0.8800	0.6400
0.7200	0.9600	1.1200	1.2000	1.2000	1.1200	0.9600	0.7200
0.7200	0.9600	1.1200	1.2000	1.2000	1.1200	0.9600	0.7200
0.6400	0.8800	1.0400	1.1200	1.1200	1.0400	0.8800	0.6400
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400

Таблица 5. Начальное приближение решения на исходной сетке в единичном базисе U_0 .

U0(: , : , 7)							
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4800	0.4311	0.6675	0.7686	0.7686	0.6675	0.4311	0.4800
0.6400	0.6675	0.8960	1.0011	1.0011	0.8960	0.6675	0.6400
0.7200	0.7686	1.0011	1.1082	1.1082	1.0011	0.7686	0.7200
0.7200	0.7686	1.0011	1.1082	1.1082	1.0011	0.7686	0.7200
0.6400	0.6675	0.8960	1.0011	1.0011	0.8960	0.6675	0.6400
0.4800	0.4311	0.6675	0.7686	0.7686	0.6675	0.4311	0.4800
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400

Таблица 6. Окончательное приближение решения на исходной сетке в единичном базисе U_k .

Uk(: , : , 7)							
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.6400	0.8800	1.0400	1.1200	1.1200	1.0400	0.8800	0.6400
0.7200	0.9600	1.1200	1.2000	1.2000	1.1200	0.9600	0.7200
0.7200	0.9600	1.1200	1.2000	1.2000	1.1200	0.9600	0.7200
0.6400	0.8800	1.0400	1.1200	1.1200	1.0400	0.8800	0.6400
0.4800	0.7200	0.8800	0.9600	0.9600	0.8800	0.7200	0.4800
0.2400	0.4800	0.6400	0.7200	0.7200	0.6400	0.4800	0.2400

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

– итерационный параметр,

$\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное, соответственно, собственное значение матрицы A .

Если

$$\|\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k\| < \varepsilon,$$

где величина $\varepsilon > 0$ – заданная точность (достаточно малая величина), тогда

$$\bar{u} \approx \bar{u}_{k+1}$$

– окончательное приближение решения системы (57).

Далее приведены данные точного решения исходной системы, начального приближения, построенного по формуле (48) и окончательного приближения по итерационной схеме. (Для удобства представления расчет проводился при $N=8$). В качестве иллюстративного материала были использованы результаты, полученные для 7-ой плоскости по каждой категории данных.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование выполнено за счет средств Государственной программы Российской Федерации «Развитие науки и технологий» на 2013-2020 годы в рамках Плана фундаментальных научных исследований Министерства строительства и жилищно-коммунального строительства Российской Федерации на 2016 год, тема 7.1.1 «Разработка многоуровневого подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций в рамках единой иерархически выстроенной расчетной модели на основе совместного применения дискретно-континуального метода конечных элементов и метода конечных элементов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
2. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Введение. Одномерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 30-39.
3. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректные алгоритмы многоуровневой аппроксимации с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: Двумерный случай. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 40-46.
4. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 1: Одномерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 39-46.
5. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный алгоритм осреднения при численном решении краевых задач с использованием дискретного базиса Хаара. Часть 2: Двумерные проблемы. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 47-56.

6. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Корректный метод локального решения краевых задач строительной механики и математической физики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 1, 2012, pp. 57-61.
7. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Некоторые элементы кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 1: Понятие о вейвлетах и кратномасштабном вейвлет-анализе. // *Вестник МГСУ*, №7, 2012, с. 44-50.
8. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** Некоторые элементы кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Анализ и синтез. // *Вестник МГСУ*, №8, 2012, с. 60-65.
9. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 1: Двумерная задача теории упругости. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 18-25.
10. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 2: Трехмерная задача теории упругости. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 26-33.
11. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л.** О корректной многоуровневой вейвлет-реализации дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. Часть 3: Задача об изгибе тонкой пластины. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 1, 2013, pp. 34-41.
12. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 1: Одномерные проблемы. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 3, 2012, pp. 17-23.
13. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Алгоритм редукции неизвестных в рамках многоуровневого численного метода локального решения краевых задач расчета конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Двумерные проблемы. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 9, Issue 3, 2013, pp. 78-86.
14. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н.** Вейвлет-анализ и его применение для решения задач расчета конструкций: Библиографический обзор. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 3, 2012, pp. 24-37.
15. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Апробация корректного метода решения краевых задач строительной механики на основе использования аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа на примере расчета балки Бернулли. // *International Journal for Computational*

- Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 8, Issue 2, 2012, pp. 97-107.
16. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** К вопросу об оценке влияния спрямления аппроксимирующей сетки на численное решение краевой задачи. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 11, Issue 1, 2015, pp. 115-120.
17. **Мозгалева М.Л., Акимов П.А.** Об исследовании дискретных методов получения локальных решений одномерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 11, Issue 1, 2015, pp. 121-134.
18. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 29-37.
19. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 38-46.
20. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.** Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций, Volume 10, Issue 2, 2014, pp. 47-55.
21. **Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Кайтукоев Т.Б., Негрозов О.А., Моджтаба Аслами.** О верификации вейвлет-реализаций многоуровневых дискретных и дискретно-континуальных методов локального расчета строительных конструкций. // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 2014, с. 14-20.

Мозгалева Марина Леонидовна, доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ МГСУ, Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д.26, тел./факс: +7(499) 183-59-94, E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Marina L. Mozgaleva, PhD, Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26, Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russia; phone/fax: +7(499) 183-59-94; E-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

МОБИЛИЗОВАННОСТЬ КАК ХАРАКТЕРИСТИКА НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.В. Перельмутер

SCAD Soft Ltd., Киев, УКРАИНА

Аннотация: Рассматривается вопрос о различиях в возможной реакции конструкции на неожиданное возмущение с учетом того, что предельное состояние конструкции является редким явлением и большую часть времени конструкция весьма далека от этого состояния. Предлагается особая мера указанного качества конструкции, называемая мобилизованностью.

Ключевые слова: случайная нагрузка, выброс за расчетный уровень, надежность

MOBILIZATION AS A CHARACTERISTIC OF RELIABILITY OF STRUCTURES

Anatolii V. Perelmuter

SCAD Soft Ltd., Kiev, UKRAINE

Abstract: The problem of the differences in the possible reaction of a structure to an unexpected perturbation is considered, taking into account the fact that the limiting state of a structure is a rare phenomenon and most of the time the design is very far from this state. A special measure of the specified quality of the structure is proposed, called mobilization.

Key words: random load, reliability, mobilization

1. Становление современной теории надежности строительных конструкций, начавшееся в первой половине 20-го столетия с осознания вероятностной природы проблемы (М. Майер [17], Н.Ф. Хоциалов [14], Н.С. Стрелецкий [12, 13], А.М. Фрейденталь [16], А.Р. Ржаницын [11]) привело пониманию особенностей работы конструкций в условиях фактической изменчивости нагрузок и несущей способности. Более общие принципиальные вопросы применения вероятностных методов к анализу надежности сооружений получили развитие в фундаментальных исследованиях В.В. Болотина [1,2], который связал теорию надежности со статистической динамикой — вероятностным расчетом конструкций с учетом фактора времени. Тем не менее, временной аспект проблемы надежности и до сего времени нельзя полагать полностью сформировавшимся. Так, по-

становка задачи об обеспечении некоторого заданного уровня надежности в течение планируемого срока эксплуатации T_{ef} сегодня никак не связывается с картиной изменения уровня надежности во времени. При этом по сути равноправными будут конструкции, у которых фактическая надежность $P(t)$ определена графиком 1 или графиком 2 (рис. 1), хотя в случае 1 конструкция «в общем» более надежна [1, с. 62].

А с точки зрения анализа, принятого в нормах проектирования, конструкция плотины, обычный уровень нагружения которой не очень далек от предельно допустимого и составляет примерно 80% от расчетного, и конструкция дымовой трубы, у которой обычное нагружение соответствует примерно 15% расчетного, оказываются равноправными (и равнонадежными?).

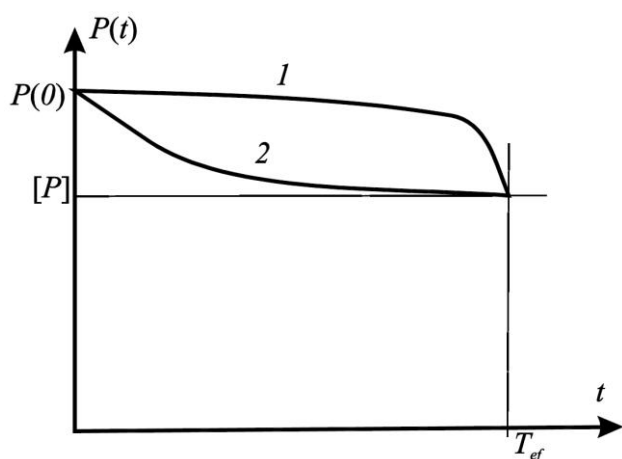


Рисунок 1. Графики фактической надежности.

Но фактически здесь имеется определенная неувязка, поскольку мы можем полагаться на равнонадежность только по отношению к тем факторам (например, внешним воздействиям), которые были приняты во внимание при проектировании и статистические характеристики которых использованы при назначении указанных в нормах расчетных коэффициентов. И в случае некоторого не предусмотренного проектом (и нормами) случайного возмущения вероятность истощения 20% запаса в первом случае намного выше, чем истощение 85% запаса во втором.

В настоящей работе дается некоторое формальное определение и меру использованному выше выражению «в общем более надежна», введением некоторой новой характеристики надежности, которая названа мобилизованностью конструкции. Заметим, что если полагать, будто вся информация для оценки надежности имеется в распоряжении расчетчика, то преимущества графика 1 по сравнению с графиком 2 практически отсутствуют. Действительно, поскольку и начальная надежность, проверяемая при приемке конструкции, и финальная надежность в обоих случаях одинаковы, то различия, существующие в промежуточные моменты времени, не сказываются на оценке качества конструкции, поскольку уровень надежности нигде не опускается ниже допустимого зна-

чения $[P]$, а не учтенные угрозы отсутствуют (напомним, что предполагается ситуация точного знания). Но если стать на более реалистичную позицию, которая учитывает невозможность полного знания и, следовательно, возможность некоторых неучтенных возмущений, то тот запас, который большую часть времени имеет конструкция 1, окажется не лишним. Эта конструкция имеет более высокую мобилизованность.

2. Будем фиксировать внимание именно на том, что помимо четко предсказуемых нагрузок и воздействий всегда существует возможность реализации некоторого непредусмотренного ни нормативными документами, ни прогнозом проектировщика случайного воздействия. Причем в этом контексте понятие «воздействие» понимается очень широко и включает в себя такие, например, события, как грубый брак, ошибка персонала, необычное для данной местности природное явление и т.п., одним словом, всяческие сюрпризы, которые ведут к существенным последствиям. Эти воздействия, безусловно, не являются массовыми и поэтому невозможен их статистический анализ, а также учет их влияния в вероятностном анализе надежности. Единственная правдоподобная гипотеза вероятностного типа состоит в том, что их реализация равновероятна в течение времени существования конструкции и что они являются весьма редкими явлениями. Американский экономист Nicolas Nassim Taleb [18] назвал подобные события «черными лебедями» (Ювенал говорил: “*rara avis in terris nigroque simillima cygno*” (лат.) – «хороший человек так же редок, как чёрный лебедь», поскольку существовала гипотеза о том, что все лебеди белые. Это было верно, пока в 1700 году не был обнаружен черный австралийский лебедь...). А с точки зрения этих сюрпризных событий важной характеристикой объекта проектирования является его уязвимость.

Уязвимость – это параметр, характеризующий возможность нанесения рассматривае-

мой системе повреждений любой природы теми или иными внешними средствами или факторами. Уязвимость неразрывно связана с известной характеристикой «живучесть» и с дополнительно предлагаемой характеристикой — «мобилизованность».

Если, как обычно считается, живучесть является в некотором смысле пространственной характеристикой, показывающей, как локальное возмущение распространяется по пространству системы и может ли это локальное разрушение получить непропорционально большое развитие «вширь», то в качестве мобилизованности будем рассматривать временную характеристику, показывающую насколько система готова и способна среагировать на локальное во времени (импульсное) неожиданное возмущение. В обоих случаях возмущение может быть достаточно сильным, чтобы было необходимо считаться с его последствиями, а природа его такова, что предсказать момент и место появления, а также другие количественные характеристики не представляется возможным. Воздействия такого типа в части EN 1991-1-7 Еврокода [15] относятся к категории неустановленных (*unidentified actions*).

Заметное отсутствие мобилизованности конструкции, как и недостаточная живучесть, должны служить поводом к повышенному вниманию и использованию некоторых защитных мероприятий. Можно, конечно, повысить уровень прямой защиты такой конструкции, вводя некоторые дополнительные коэффициенты надежности, которые уже точно, как было принято говорить в прошлом веке, следует называть коэффициентами незнания, но вряд ли такой путь является продуктивным. Все же основой стратегии защиты должны стать косвенные меры предупредительного характера, такие как усиленный контроль, или же конструктивные решения.

Из малой вероятности реализации возможного возмущения следует, что проверке подлежит поведение конструкции, на которую действуют только постоянные нагрузки и и некоторая наиболее вероятная часть временных

нагрузок (например, их длительные составляющие), и оценивать уровень мобилизованности конструкции следует именно в таком состоянии. Так, в производственных зданиях усилия в колоннах, вызванные постоянными и длительными нагрузками редко превышают 15-20%, и поэтому даже вывод колонны из строя (например, вследствие террористического акта) не обязательно должен привести к обрушению всего здания, поскольку при хорошей пространственной развязке двадцатипроцентную нагрузку вместо выбывшего из строя элемента способны нести соседние элементы каркаса. А в офисных, жилых и общественных зданиях усилия от собственного веса несущих и ограждающих конструкций, а также от действия длительной части полезных нагрузок составляют 70-80% от уровня несущей способности и здесь уже трудно ожидать такого же эффекта.

Поэтому вызывают определенные сомнения слова из статьи [5] «В годы войны отступающие войска фашистов, пытаясь уничтожить наш промышленный потенциал, подрывали колонну громадного цеха, и, оглядываясь назад, с удивлением видели, что он не падает... Сейчас с экранов телевизоров нас убеждают в том, что если одна колонна упадет, то и все здание обязано упасть. Если это так, то такое здание должно стоять вдали от людей с часовым у ворот, который никого бы в него не впускал, кроме авторов проекта». Думаю, что с этим мнением вряд ли согласятся те, кто видел результаты подрыва жилых домов в Москве или в Волгодонске.

Следует заметить, что различия в мобилизованности могут никак не сказаться на вероятности отказа конструкции, если иметь в виду только те воздействия, которые прямо учтены проектом. Действительно, легко себе представить (рис. 2), что если на две конструкции действуют нагрузки с различными значениями математически ожиданий. $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2 < \bar{q}_1$, но среднеквадратичные отклонения у них таковы, что $\hat{q}_2 > \hat{q}_1$, то может случиться, что расчетные значения таких нагрузок ока-

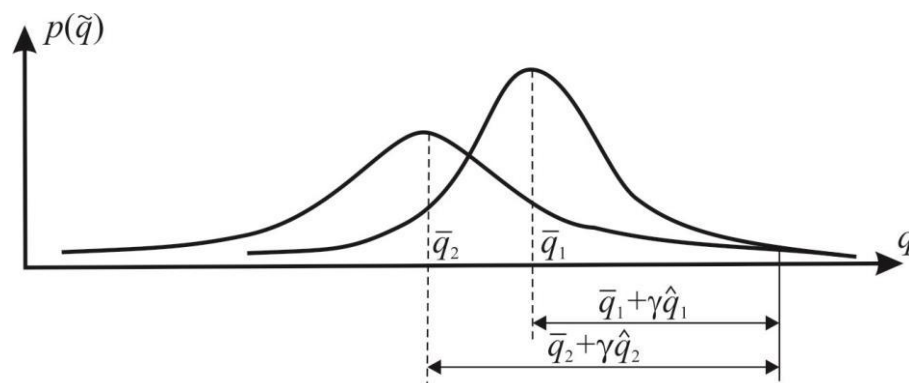


Рисунок 2. К вопросу сопоставления нагрузок.

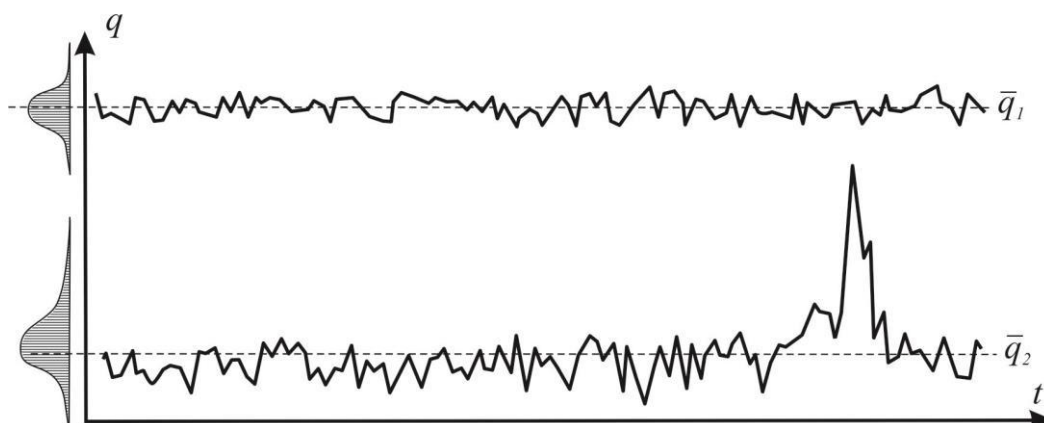


Рисунок 3. К вопросу вероятности совпадения возмущения с тем или иным значением нагрузки.

жуются одинаковыми и используют одинаковый индекс надежности γ (измеренный в среднеквадратичных отклонениях запас надежности), и одинаковой будет их вероятность отказа (Система обозначений параметров случайных величин и случайных процессов принята по [11], где для случайной величины используется обозначение $\tilde{x}$, для ее математического ожидания – $\bar{x}$, для дисперсии – $\bar{x}$, а для стандарта – $\hat{x}$).

Эта ситуация является в достаточной мере типичной, если полагать, что нагружение q_1 связано только с одной временной нагрузкой, а нагружение q_2 включает в себя много (например, n) различных временных нагрузок. Действительно, дисперсии компонентов, входящих в комбинированное нагружение, суммируются и если для простоты предположить, что дисперсии всех упомянутых

нагрузок одинаковы и равны $\hat{q}_1$, то будем иметь $\hat{q}_n = n\hat{q}_1$.

Если обратится к описанию картины во времени, и учесть что возмущение может реализоваться в любой момент времени, то здесь важную роль начинает играть вероятность совпадения возмущения с тем или иным значением нагрузки, которая меняется во времени по случайному закону (рис. 3).

Здесь важной характеристикой системы является эффективная частота случайного процесса $\tilde{q}(t)$, которым является действующая нагрузка. Эта частота равна средней частоте пересечения среднего уровня нагрузки $\bar{q}$ и для нормального стационарного процесса определяется по формуле

$$\omega_{ef} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hat{\tilde{q}}}{\bar{\tilde{q}}}}, \quad (1)$$

Таблица 1. Сопоставление мобилизованности нагрузок.

Нагрузка		$\bar{q}$, Па	V	γ	ω	v_+ , 1/год	T_γ , лет	μ
Постоянная			0,10			0	∞	∞
Снеговая	I р-н	163,6	1,60	2,058	0,141 1/сут	0,4114	2,43	0,100
	II р-н	343,8	1,26	1,496	0,095 1/сут	0,3175	3,15	0,094
	III р-н	631,0	0,92	1,256	0,073 1/сут	0,2600	3,85	0,096
Ветровая	I р-н	8,6	1,814	20,130	6,58 1/сут	$1,151 \cdot 10^{-2}$	86,8	34,946
	II р-н	14,6	1,781	15,600	5,16 1/сут	$3,551 \cdot 10^{-2}$	28,2	8,798
	III р-н	22,3	1,731	13,210	5,42 1/сут	$7,456 \cdot 10^{-2}$	13,4	3,540
Вертикальная крановая	Вар-т 1			5,645	106,8 1/ч	$1,79 \cdot 10^{-2}$	55,8	6,300
	Вар-т 2			5,274	106,8 1/ч	$1,36 \cdot 10^{-1}$	7,4	0,780
	Вар-т 3			7,100	106,8 1/ч	$3,00 \cdot 10^{-7}$	$3,32 \cdot 10^6$	471440
	Вар-т 4			6,730	106,8 1/ч	$3,88 \cdot 10^{-6}$	$2,58 \cdot 10^5$	34726,8
V — коэффициент вариации; v_+ — среднегодовое число выбросов за расчетный уровень нагрузок								

где $\hat{q}, \hat{q}$ — дисперсия скорости процесса и дисперсия его ординат. Эффективный период $T_{ef} = 1/\omega_{ef}$ определяет среднее время между этими пересечениями.

Знание эффективной частоты открывает возможность для определения частоты выбросов случайного процесса за нормированный уровень γ за время t , в частности, при нормальном распределении ординаты процесса, по известной формуле

$$v_+(\gamma, t) = \frac{1}{2\pi} \omega_{ef} \cdot t \cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right). \quad (2)$$

3. Очевидно, что мобилизованность конструкции повышается как с увеличением индекса надежности $\square$ (числом стандартов, отделяющих среднее значение нагрузки от ее расчетного значения), так и с увеличением промежутка времени T_γ между выбросами нагрузочного процесса за уровень расчетного значения. Поэтому предлагается в качестве меры мобилизованности в первом приближении принять величину

$$\mu = \gamma(T_\gamma/T_s), \quad (3)$$

где T_s — расчетный срок эксплуатации сооружения.

Для нормального случайного процесса величина T_γ определяется формулой

$$T_\gamma = \frac{1}{v_+(\gamma)} = \frac{2\pi}{\omega_{ef}} \cdot \exp \frac{\gamma^2}{2}, \quad (4)$$

следовательно, в этом случае

$$\mu = \frac{2\pi\gamma}{\omega_{ef} T_s} \cdot \exp \frac{\gamma^2}{2}. \quad (5)$$

В таблице 1 приведены сведения об уровне мобилизованности некоторых нагрузок при сроке эксплуатации, равном 50 годам. Параметры вероятностного описания нагрузок приняты по данным [9].

Из этой таблицы видно насколько различными могут быть значения μ , у нагрузок, которые мы полагаем в некотором смысле рав-

ноценными, поскольку все они нормами проектирования отнесены к одному классу временных нагрузок.

4. На практике редко встречаются конструкции, подверженные действию только одной нагрузки чаще всего используется расчетная комбинация нагрузок, которую мы будем полагать суммой стационарных случайных процессов

$$\tilde{q}_\Sigma = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{q}_i, \quad (6)$$

где коэффициенты влияния c_i переводят значения нагрузок в компоненты расчетного усилия или напряжения. Математическое ожидание и стандарт суммарной нагрузки определяются как

$$\bar{q}_\Sigma = \sum_{i=1}^n c_i \bar{q}_i; \quad \hat{q}_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \bar{q}_i V_i)^2}. \quad (7)$$

Если составляющие этой суммы не коррелированы между собой, то, следуя рассуждениям В.В. Болотина [3], будем иметь для эффективной частоты суммарной нагрузки

$$\omega_\Sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\omega_i c_i \bar{q}_i V_i)^2}{\sum_{i=1}^n (c_i \bar{q}_i V_i)^2}}. \quad (8)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда на конструкцию действует постоянная нагрузка $\tilde{q}_1$ с математическим ожиданием $\bar{q}_1 = 15,12$ Па, снеговая нагрузка I-го района $\tilde{q}_2$ и ветровая нагрузка II -го района $\tilde{q}_3$. Коэффициенты $c_i \geq 0$ зависят от параметров конструкции и, в общем случае, от того, для проверки какого элемента (и какого его сечения) предполагается использовать расчет-

ную комбинацию усилий. Мы для простоты рассмотрим вариант $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

Числовые характеристики суммарного усилия, согласно формулам (7)

$$\begin{aligned} \bar{q}_\Sigma &= 15,12 + 163,6 + 14,6 = 193,3; \\ \hat{q}_\Sigma &= \sqrt{(15,2 \cdot 0,1)^2 + (163,6 \cdot 1,6)^2 + (14,6 \cdot 1,78)^2} = \\ &= 263,0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание расчетное значение суммарного усилия

$$q_\Sigma^p = 19 + 700 + 420 = 1139$$

определим его нормированное отклонение

$$\gamma_\Sigma = \frac{q_\Sigma^p - \bar{q}_\Sigma}{\hat{q}_\Sigma} = \frac{1139 - 193,3}{263,0} = 3,60.$$

По формуле (8) вычисляем эффективную частоту суммарного воздействия, используя вероятностные параметры нагрузок из таблицы 1:

$$\begin{aligned} \omega_\Sigma &= \sqrt{\frac{(0,141 \cdot 163,6 \cdot 1,6)^2 + (5,16 \cdot 14,6 \cdot 1,78)^2}{(15,2 \cdot 0,1)^2 + (163,6 \cdot 1,6)^2 + (14,6 \cdot 1,78)^2}} = \\ &= 0,529 \text{ 1/сутки} \end{aligned}$$

Годичную частоту выбросов определяем по формуле (2), принимая во внимание среднюю продолжительность зимнего периода $t_3 = 145$ суток и введя в знаменатель коэффициент широкополосности $\beta_\omega = 3$, учитывающий многочастотность суммарного случайного процесса [6]:

$$v_\Sigma(\gamma_\Sigma, t_3) = \frac{0,529 \cdot 145 \cdot \exp(-0,5 \cdot 3,6^2)}{3 \cdot 2\pi \cdot 1/\text{год}} = 0,00623$$

Полученный период повторяемости выбросов $T_{\Sigma} = 1/\nu_{\Sigma} = 160,5$ лет намного превышает период повторяемости взятых порознь снеговой и ветровой загрузок, то же самое относится к величине $\mu = 11,56$.

Необходимо отметить, что значение мобилизованности характеризует не конструкцию в целом, а ее отдельный элемент (сечение). Подобно оценке надежности, минимальное из значений этой характеристики можно отнести к конструкции в целом (схема слабого звена).

5. Вычисление мобилизованности требует более тщательной оценки статистических свойств действующих на сооружение нагрузок, и коэффициент γ ни в коем случае не следует отождествлять с известным из норм коэффициентом надежности по нагрузке γ_f . Последний учитывает далеко не все факторы, определяющие реальную картину изменения нагрузок во времени. Так, например, для крановой нагрузки СНиП дает значение $\gamma_f = 1,1$, что очень далеко отстоит от данных таблицы 1. И дело не только в том, что коэффициент надежности по нагрузке γ_f связан с переходом от нормативного (характеристического) значения к расчетному, а коэффициент γ определяет переход от среднего значения к расчетному. Более важным является то обстоятельство, что нормируемые величины γ_f определены для «нагрузки вообще» и не учитывают целого ряда дополнительных случайных параметров, появляющихся при анализе способа реализации такой нагрузки в определенной конструкции.

Так, например, для крановой нагрузки [10] важным может быть такой фактор, как вероятность вполне конкретного положения на линии влияния, когда может реализоваться расчетное усилие в конструкции. Если же учитывать совместное действие нескольких кранов, то оказывается, что вероятность совпадения их расчетных позиций еще меньше, что резко снижает средний уровень усилия в конструкции.

Другой пример – действие ветровой нагрузки на башенное сооружение. Здесь появление

расчетного значения усилия в каком-нибудь элементе конструкции связанного со случайным направлением ветра. Кроме того, приведенная в нормах картина распределения ветрового напора по высоте является некой огибающей реальных реализаций скорости ветра и имеет вероятность реализации, далеко не равную единице. Не случайно, что вся мировая история высотного строительства не знает случаев обрушения башен от действия ветровой нагрузки (исключением являются торнадо и сочетание ветра с гололедом, да и то это в основном относится к мачтам на оттяжках).

6. В заключение подведем некоторые итоги:

- Мобилизованность, как новая характеристика способности конструкции к восприятию внезапного возмущения, по видимому, может служить основой для принятия проектных и организационных решений, в особенности для сооружений повышенного уровня ответственности.
- Нуждается в дальнейшем изучении вопрос о выборе удобного способа измерения мобилизованности. Соответствующая мера может быть сконструирована на основе сопоставления с хорошо зарекомендовавшими себя проектными решениями. Возможен также подход, основанный на соглашении о параметрах некоторого стандартизованного тестового возмущения (различного для разных типов сооружений). Примером может служить рекомендация пункта 3.3(2) из EN 1991-1-7 [15] об использовании для проверки живучести системы гипотетической нагрузки 34 кН/м^2 , которая прикладывается в любом направлении к ключевому элементу здания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. – М.: Стройиздат, 1965. – 280 с.

2. **Болотин В.В.** Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1981. – 351 с.
3. **Болотин В.В.** О сочетании случайных нагрузок, действующих на сооружение // Строительная механика и расчет сооружений, №2, 1962, с. 1-5.
4. **Гульванесян Х., Формичи П., Калгаро Дж.А.** Руководство для проектировщиков к Еврокоду 1: Воздействия на сооружение. Разделы EN 1991-1-1 и с EN 1991-1-3 по EN 1991-1-7.— М.: МГСУ, 2011. – 343 с.
5. **Ларионов В.В.** Публичная техническая политика в строительстве // Промышленное и гражданское строительство, №5, 2004, с. 11-12.
6. **Лоллейт А.Ф.** О подборе сечений железобетонных элементов. по критическим усилиям. – М. – Л., 1933. – 68 с.
7. **Перельмутер А.В.** Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2007. – 256 с.
8. **Перельмутер А.В., Пичугин С.Ф.** Об оценке уязвимости строительных конструкций. // Инженерно-строительный журнал, №5, 2014, с. 5-14.
9. **Пичугин С.Ф.** Надежность стальных конструкций производственных зданий. – М.: АСВ, 2011. – 456 с..
10. **Пичугин С.Ф.** Крановые нагрузки на строительные конструкции. – Полтава: ООО «АСМИ», 2014. – 504 с.
11. **Ржаницын А.Р.** Теория расчета конструкций на надежность.— М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
12. **Стрелецкий Н.С.** Новая методика расчета конструкций. – М.: Издание Московского инженерно-строительного института, 1936. – 36 с.
13. **Стрелецкий Н.С.** Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений. – М.: Стройиздат. 1947. – 92 с.
14. **Хоциалов Н.Ф.** Запасы прочности. // Строительная промышленность, №10, 1929.
15. EN 1991-1-7: Eurocode 1: Actions on structures. Part 1-7: General actions. Accidental actions. Brussels: European Committee for Standardisation, 2006, 66 pages.
16. **Freudenthal A.M.** Safety und the probability of structural failure. // Proc. of ASCE, vol. 80, paper No 468, 1954.
17. **Maier M.** Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkaf-ten anstatt nach zulassigen Spannungen . Berlin, Springer-Verlag, 1926.
18. **Nassim Nicolas Taleb.** The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable. New York: Random House, 2007, 394 pages.

Перельмутер Анатолий Викторович, иностранный член РААСН, профессор, доктор технических наук, НПО СКАД Софт, 03037, Украина, г. Киев, ул. Провсящения, дом 3а, офис 2, e-mail: avp@scadsoft.com.

Anatolii V. Perelmuter, Foreign member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Science, Professor, SCAD Soft, Ltd, Kiev, Ukraine e-mail: avp@scadsoft.com.

ПОИСК И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ КОНСТРУКТИВНЫХ ПУСТОТ С ПОМОЩЬЮ ГЕОРАДАРНОЙ ТОМОГРАФИИ НА ПРИМЕРЕ ДВУХ КОЛОНН

М.С. Судакова^{1,2}, Е.Б. Терентьева¹, А.Ю. Калашиников¹

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, РОССИЯ

² Институт Криосферы Земли Сибирского отделения Российской академии наук, г. Тюмень, РОССИЯ

Аннотация: В статье приведены результаты исследования, целью которых является оценка возможности обнаружения и оконтуривания конструктивных пустот, размеры которых превышают длину волны для используемой частоты. Описываются два примера применения георадиолокационного томографического просвечивания: 1) квадратной бетонной колонны с гранитной облицовкой, полый внутри, и 2) цилиндрической гранитной колонны с конструктивной полостью круглой формы с железными стенками. Рассматриваются вопросы методики, структура получаемых данных, выделение полезных волн на фоне помех, анализируется результат томографического обращения, который сравнивается с результатом георадиолокации в традиционной модификации с совмещённым источником и приёмником. В результате проделанной работы было доказано, что задача поиска, оконтуривания и определения размеров пустот внутри строительных конструкций уверенно решается при помощи георадарной томографии. С высокой точностью было определено распределение скорости электромагнитных волн в твёрдой части колонн (бетоне и граните), которое может быть использовано для пересчёта в физические свойства, такие как влажность, пористость и пр. Был получен количественный результат, лишенный обычной неоднозначности, свойственной косвенным методам исследования, и является более качественным и достоверным по сравнению с результатами георадиолокационного зондирования с совмещённым источником и приёмником.

Ключевые слова: неразрушающий контроль, электромагнитные методы исследования, прямая и обратная задачи, математическое моделирование, георадар, томография.

SEARCHING AND MEASUREMENT OF FUNCTIONAL VOIDS BY MEANS OF GPR TOMOGRAPHY BY THE EXAMPLE OF TWO COLUMNS

Marina S. Sudakova^{1,2}, Evgeniya B. Terentieva¹, Alexey Yu. Kalashnikov¹

¹ Lomonosov Moscow State University, Moscow, RUSSIA

² Earth Cryosphere Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, RUSSIA

Abstract: The present article focuses on GPR tomography method potential aimed at the search of functional voids and estimation of their sizes in engineering structures. The size of voids is assumed to be greater than the wavelength for usable frequency. Two examples of the GPR tomographic survey are examined: 1) a square concrete pillar with granite coating and a square void in the center, 2) cylindrical granite column with functional spherical void which has iron walls. The following issues are considered in the article: the method, the structure of the acquired data, the picking of wanted waves, the analysis of tomographic inversion result, compared with the result of commonly used single-fold antenna geometry GPR. As a result of the research performed it was demonstrated that GPR tomography represents a good solution for the problem of detection, delineation and characterization of voids inside engineering structures. The velocity of electromagnetic waves propagated within the solid part of the column (concrete and granite) was accurately measured. The measured velocity can be considered to the basis for physical properties estimation, for example humidity, voids ratio etc. The acquired quantitative results are characterized by high quality and are more reliable compared to the results of single-fold GPR survey.

Key words: Non-destructive testing, electromagnetic methods, forward and inverse problem solving, mathematical modelling, ground penetrating radar, tomography

ВВЕДЕНИЕ

Несущие свойства строительных конструкций зависят не только от свойств материала, но и от дефектов внутренней структуры: трещин, инородных включений и пустот. Существуют различные методы неразрушающего контроля в строительстве, в том числе георадиолокация. В большинстве случаев её использование направлено на выяснение структурной информации: оценку толщин конструктивных элементов [2, 9], обнаружение и выявление местоположения стальной арматуры или труб, перекрытых цементным слоем [17]. Кроме того, с помощью метода георадиолокации решаются задачи оценки присутствия влаги в бетоне [9, 10] и выявления крупных пустот [12].

Распространенной модификацией георадиолокации является модификация с совмещённым источником и приёмником. Кажущаяся простота такой методики оборачивается ошибками в определении строения среды и невозможностью получить её количественные характеристики. В частности, многие исследователи отмечают невозможность отличить пустоты с воздухом от других особенностей конфигурации [16, 17, 7], в том числе конструктивные пустоты с железными стенками. Переход на количественный уровень и увеличение объема получаемой информации обеспечивает метод с разнесенными источником и приёмником. Использование метода томографии в георадиолокации помогает избавиться от ограничений метода с совмещённым источником и приёмником и перейти на количественный уровень. Томография подразумевает значительное увеличение числа точек наблюдения, однако сложность и трудоемкость методики компенсируется качеством получаемой информации. В результате получают новую информацию: скорости распространения электромагнитных (ЭМ) волн в среде и оценку размеров конструктивных пустот.

По сравнению с сейсмической и георадарной скважинной томографией, когда источники и

приёмники расположены в скважинах с двух сторон исследуемого массива, в обследовании инженерных конструкций есть большое преимущество: возможность расположения точек излучения по периметру или на большей его части. Это помогает увеличить количество лучей, проходящих через исследуемую среду, и, следовательно, точность применения метода.

Аналогичная георадиолокационной акустическая томография имеет ряд важных недостатков: во-первых, число точек физических наблюдений ограничено количеством сейсмических каналов, тогда как непрерывное перемещение приёмной или излучающей антенны георадара позволяет записать на порядок больше трасс, а во-вторых, скорость продольных волн в твёрдой части в несколько раз больше скорости в воздухе, что затрудняет правильное восстановление скорости сейсмических волн внутри полости и делает её идентификацию как "заполненную воздухом" затруднительной. Например, в работе [21], при скорости в твёрдой части около 3200 м/с скорость в воздушной полости равнялась 2500 м/с, что в 8 раз больше истинных 330 м/с.

Несмотря на очевидные достоинства применения георадарной томографии, существуют и «подводные камни»: распространённая в сейсморазведке лучевая томография представляет собой расчёт скорости в среде из времен первых вступлений, в то время как в георадиолокации первыми приходят волны, полностью или часть пути, проходящие по воздуху. Методически решать эту проблему, исключая из рассмотрения точки приема, в которые первыми приходят "воздушные" волны, как предлагается в [1], значит лишиться большинства точек наблюдения. Возможна попытка разделения "воздушных" и полезных волн (распространяющихся в среде), основанная на кинематических и динамических признаках (времени прихода, амплитуде и частоте).

В отличие от работ российских исследователей в мировой практике метод георадарной

томографии нашел более широкое применение как при решении инженерно-геологических задач, так и при обследовании зданий и сооружений, например [21]. При этом нигде не рассматриваются вопросы методики, анализа волновых картин, выделения прямых волн; проблема наличия железных стенок.

Ввиду того, что железо играет роль абсолютного отражателя [1], волны не будут распространяться в пустоте в случае наличия железных стенок. В результате, получаемая при расчете скорость будет иметь или аномально низкие значения, или не изменится по сравнению с начальной моделью. Тогда как в колонне с пустотой без железных стенок мы ожидаем встретить высокие значения скоростей.

В данной статье приведены результаты исследования, целью которых является оценка возможности обнаружения и оконтуривания пустот, размеры которых превышают длину волны для используемой частоты. Рассматриваются вопросы методики, структура получаемых данных, выделение полезных волн на фоне помех, анализируется результат томографического обращения, который сравнивается с результатом георадиолокации в модификации совмещенного источника и приемника. Описываются два примера применения георадиолокационного томографического просвечивания. Один пример – просвечивание гранитной колонны, с квадратным сечением и полостью внутри. В качестве другого примера используется гранитная колонна с конструктивной полостью круглой формы с железными стенками.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТОМОГРАФИИ

По типам используемых данных томография делится на лучевую, дифракционную и полноволновую. Длины волн, используемые в лучевой томографии значительно меньше размеров изучаемых неоднородностей. В дифракционной томографии, напротив, используется длинноволновое приближение. В

настоящее время для изучения трехмерных скоростных неоднородностей наибольшее распространение получили методы лучевой томографии. Лучевая томография – это обратная задача, при решении которой исходные данные представляются в виде функционалов по линиям (лучам) в пространстве. В лучевом приближении полагают, что энергия распространяется по лучевым трубкам некоторой толщины, зависящей от длины волны. Поэтому при большом количестве лучей лучевые трубки покрывают всю изучаемую область [24]. Среди основных уравнений лучевой томографии – уравнение эйконала, которое связывает время прихода волны в точку с распределением соответствующей скорости. Следствием его является интеграл, выражающий время распространения волны вдоль некоторого луча P от i -го источника к j -му приемнику:

$$T_{ij} = \int_{P_{ij}} \frac{dl}{v(r)} = \int_{P_{ij}} s \cdot dl, \quad (1)$$

где

$$s = \frac{1}{v(r)}$$

– параметр, обратный скорости и называемый медленность.

Это уравнение является основным уравнением лучевой томографии, на основе которого можно рассчитать поля времен и траектории сейсмических лучей. Решение же обратной задачи строится на поиске $V(r)$ по заданным распределениям T_{ij} . Эти уравнения справедливы для приближения $\omega \rightarrow \infty$. На практике это значит, что длина волны должна быть много меньше, чем размер неоднородности. Поскольку траектория распространения лучей зависит от скорости, то зависимость времен прихода нелинейная. Для линеаризации этого выражения используется принцип Ферма. Подробности решения задачи томографии можно найти, например, в работе [15].

Предположим, что время пробега для стартовой, или фоновой модели равно T_0 , то есть:

$$T_{i0} = \int_{P_0} \frac{dl}{v_0(r)}. \quad (2)$$

После чего рассчитывают интеграл по всему лучу P_0 , рассчитанному для фоновой модели. Этот подход облегчает прослеживание лучей путем выбора слоистой фоновой модели для расчета пути P_0 :

$$T_{ij} = \int_{P_0} \frac{dl}{v(r)} \quad (3)$$

При вычитании получают линеаризованное соотношение для задержки времен пробега δT :

$$\delta T = T - T_0 \approx \int_{P_0} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) dl \approx - \int_{P_0} \frac{\delta v}{v^2} dl, \quad (4)$$

где $\delta V(r)$ – скоростная аномалия модели.

В итоге устанавливается приближенное линейное соотношение между δV и отклонением между временами T_i T_0 при условии допущения о том, что траектория луча сохраняется той же. Задача сводится к восстановлению δV по известному временному отклонению.

ГЕОРАДИОЛОКАЦИЯ В ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ МОДИФИКАЦИИ

Георадарная томография является аналогом метода сейсмической томографии применительно к полю электромагнитных волн. Задача восстановления скоростей электромагнитных волн, проходящих через выделенный объем среды, по временам прихода при известных положениях источников и приёмников решается так же, как и в сейсмической томографии. Подробное описание метода можно найти как в иностранных, так и в отечественных работах [15, 23, 24]. Широко используемые томографические алгоритмы дают хорошие результаты при решении задачи построения изображений для большинства геофизических моделей. Однако ряд задач и являются трудными для решения и последующего анализа.

Наиболее сложной является задача выделения и определения размеров областей, в которых скорость распространения волн значительно отличается от скорости вмещающей среды в большую или меньшую сторону. Скоростная аномалия приводит к тому, что в процессе решения задачи разница скоростей распределяется по всей среде и граница между участками сред с разными значениями скоростей становится размытой [13]. Например, в работе [4] показано, как успешно решить задачу построения изображений высокоскоростных аномалий при скачке скорости более, чем на 20%, на основе использования т.н. «нерегулярных» алгоритмов, предлагаемых различными авторами [14, 6, 5].

Для томографического обращения георадарных данных используются те же математические алгоритмы, что и в сейсморазведке, поэтому все вышеуказанные выводы будут справедливы и здесь. Скорость распространения электромагнитной волны в воздухе равна 30 см/нс, тогда как в твердом веществе (граните, бетоне и т.д.) она составляет 10-17 см/нс. Таким образом, наблюдаемый скоростной контраст для случая контакта бетона с воздушной полостью много больше 30%, рассматриваемых в сейсморазведке. Между тем, в зарубежной литературе встречаются единичные примеры радарной томографии при поиске пустот [21]. При этом исследователям удается с достаточной степенью точности установить размеры пустот, с учётом того, что скорость в пределах пустот принималась равной 20 см/нс, что на 30% отличается от истинной.

ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ, МЕТОДИКА И АППАРАТУРА

В качестве целевого объекта нами были выбраны две колонны главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова известной конфигурации. Фото колонн приведены на Рисунок 1.

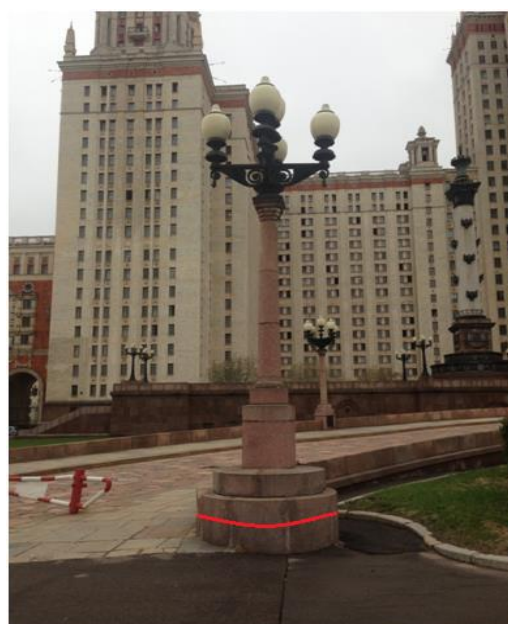


Рисунок 1. Объекты исследования. Красной линией показаны проекция плоскости просвечивания.

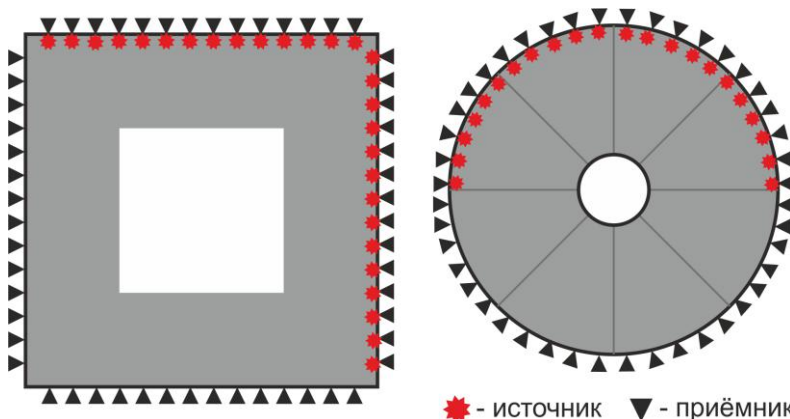


Рисунок 2. Расположение источников и приёмников на колоннах.

Согласно сведениям, представленным инженерной службой МГУ, обе колонны имеют симметричное строение. Под гранитной облицовкой квадратной колонны находятся несколько слоёв бетона различной прочности, возможно с металлическими армирующими конструкциями. Сечение колонны в горизонтальной плоскости – квадрат со сторонами 1,5 м, по центру которого квадратная пустота со сторонами по 70 см. Таким образом, толщина гранитно-бетонного слоя около 40 см со всех сторон. Радиус круглой колонны - около 70 см, она состоит из восьми гранитных блоков и имеет конструктивную полость по центру

диаметром 30 см, с железными стенками (фонарный столб). Их схематичное строение в горизонтальной плоскости вместе с расположением источников и приёмников показано на Рисунок 2. Серым цветом показана гранитно-бетонная часть, белым - пустота, чёрным цветом - железные стенки.

Георадарное просвечивание, имеет большую плотность наблюдения, что дает возможность увеличить число лучей, проходящих через исследуемую среду.

На квадратной колонне пункты излучения располагались на двух соседних гранях; при исследованиях на круглой колонне по поло-

вине периметра колонны. Интервал между пунктами излучения составил 10 см. Особенности геометрии наблюдения объясняются принципом взаимности [8], благодаря чему источники могут располагаться только на половине периметра исследуемого объекта. В случае аномалии изометричной формы наилучший способ оконтурить ее – обеспечить пересечение лучами этой аномалии со всех сторон [11]. В нашем случае приемная антенна перемещалась в режиме непрерывной съёмки по всему периметру колонн, что обеспечивало полное лучевое покрытие колонн во всех направлениях. На необработанных данных шаг между трассами составил около 1 мм.

Проблема выбора аппаратуры для томографических радарных исследований заключается в том, что немногие производители выпускают многоканальные радары с возможностью разделить источники и приемники. Для проведения томографического эксперимента нами использовался двухканальный георадар “Zond 12e” (RadarSystems, Рига, Латвия) с двумя антеннами с центральными частотами в воздухе 2000 МГц.

Взаимная ориентация излучающей (И) и приёмной (П) антенн на плоскости исследования показана на Рисунок 3. Такая ориентация была выбрана с точки зрения наибольшей площади пересечения диаграмм направленности антенн типа бабочка и направленности энергии излучения в среду. К тому же, взаимное расположение источников и приемников, демонстрируемое на Рисунок 3 обеспечивает получение радарограмм, которые мало подвержены влиянию «боковых» помех, лежащих вне линии профиля [1].

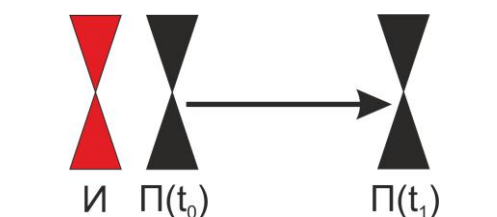


Рисунок 3. Взаимное расположение источника (И) и приёмника (П).

ИЗМЕРЕНИЯ С СОВМЕЩЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ И ПРИЕМНИКОМ

Также было сделано георадарное просвечивание колонн по традиционной методике (с совмещёнными источником и приёмником) с той же аппаратурой. Шаг по профилю составил около 2 см, развертка – 30 нс.

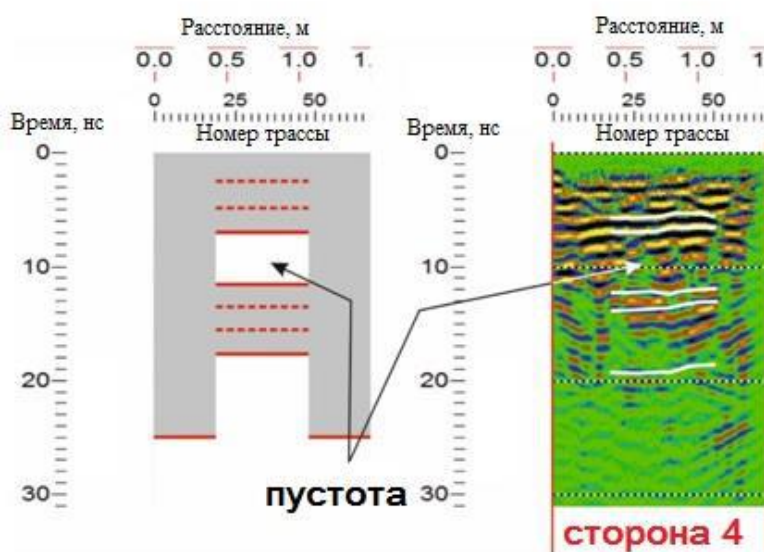
Измерения на квадратной колонне были произведены со всех сторон, данные, полученные на разных сторонах, аналогичны. Радарограмма, полученная на одной из сторон, приведена на Рисунок 4, а. Слева от неё приведена кинематическая модель (результат решения прямой задачи), которая соответствует строению колонны. На радарограмме видны четкие высокоамплитудные оси синфазности. Между тем, слоистая модель среды, которую можно построить на основании интерпретации радарограмм, существенно отличается от проектной конфигурации колонны. На приведённой радарограмме трудно обнаружить явные признаки наличия пустоты, такие как увеличение амплитуды, кратные отражения и т.д. Более того, точная оценка размера пустоты на основе геометрии с совмещённым источником и приёмником невозможна [19].

На радарограмме, полученной при измерениях по периметру круглой колонны (Рисунок 4, б) на времени 7нс (соответствует глубине 42см при скорости 12см/нс) выделяется высокоамплитудная ось синфазности, которая свидетельствует о наличии границы с большим коэффициентом отражения внутри колонны (показана белым). Идентификация этой границы как верхней кромки полости также затруднительна. Кроме этого, на данных присутствуют наклонные отражения от границ гранитных блоков: их количество соответствует числу блоков (8).

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Ранее уже отмечалось, что, поскольку скорость электромагнитных волн в воздухе –

а)



б)

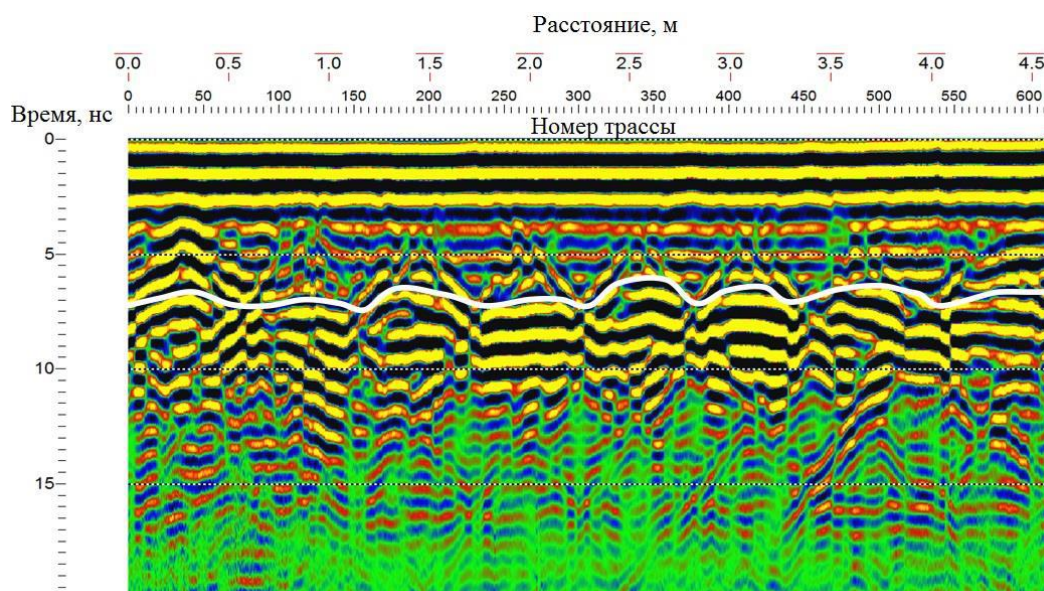


Рисунок 4. Радарограммы, полученные при работе с совмещенным источником и приёмником на квадратной (а) круглой (б) колоннах. Белым показаны выделяемые оси синфазности.

самая большая из существующих, при работе с разделёнными излучающей и принимающей георадарными антеннами первыми будут приходить волны, частично или полностью распространяющиеся по воздуху.

Полезными волнами являются те волны, которые распространяющиеся внутри среды – конструкции или геологического разреза – так называемые «прямые» волны, которые

будут приходить во вторых и/или последующих вступлениях. Вследствие интерференции с воздушными волнами, выделение целевых волн может быть затруднительно или невозможно.

Для точного разделения различных волн был проведён анализ волновых картин, полученных с разными расположениями источников и приёмников, а также решалась прямая за-

Поиск и определение размеров конструктивных пустот с помощью георадарной томографии на примере двух колонн

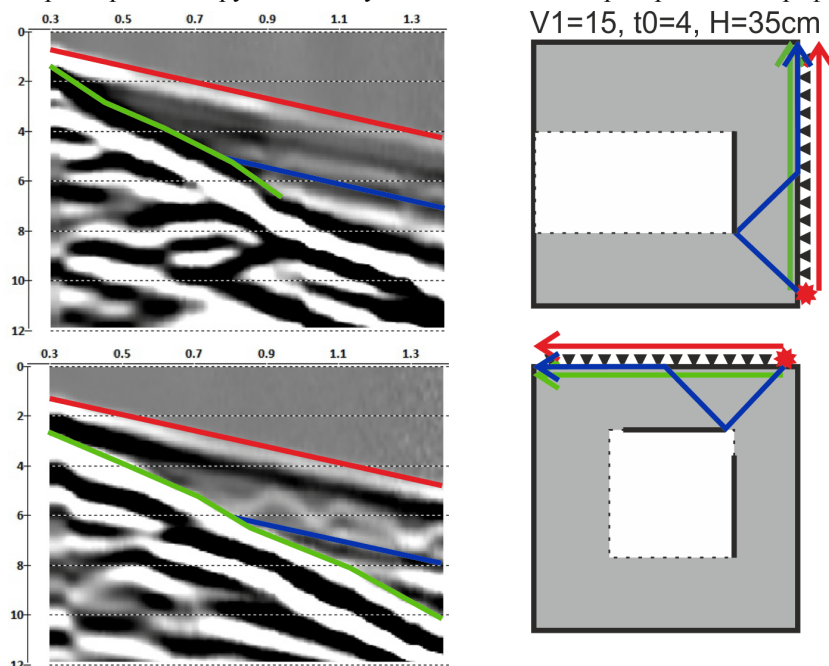


Рисунок 5. Экспериментальные волновые картины, полученные на стороне 1 квадратной колонны и теоретические пикировки, рассчитанные для разных типов волн.

дача в лучевом приближении. Для визуализации и выделения первых вступлений использовалась программа «RadexPro» компании «Деко-Геофизика».

Квадратная колонна

Волновые картины, соответствующие разным сторонам, анализировались отдельно. Избранные радарограммы представлены на Рисунок 5 - Рисунок 7. Справа от радарограмм на рисунках приведены схемы расположения источников и приёмников (показаны красными звездами и чёрными треугольниками соответственно) на колоннах с лучевыми траекториями волн, оси синфазности которых можно проследить.

На Рисунок 5. представлены радарограммы, полученные, когда источники приёмники располагались на одной стороне («сторона 1»), положение источника показано звездочкой.

Такая методика съёмки подобна методике работ с использованием преломлённых волн, широко применяемой в сейсморазведке [22]. Её применение в георадиолокации для исследования разреза подробно описано в [3]. Волновая картина, полученная нами, аналогична приведённой в статье [3]: в первых

вступлениях приходит волна, распространяющаяся между источником и приёмником по воздуху со скоростью 30 см/нс (показана красным). Во вторых вступлениях на небольших удалениях приходит прямая волна, распространяющаяся по среде (показана зелёным) с кажущейся скоростью около 15 см/нс; а на больших удалениях - волна, график которой параллелен «воздушной» волне – её скорость 30 см/нс. Это волна, отразившаяся от границы внутри среды, вернувшаяся обратно к дневной поверхности и преломившаяся под критическим углом на границе среда/воздух. После этого она распространяется по этой границе со скоростью во второй среде, то есть в воздухе. Наличие данной волны является индикатором наличия внутри среды отражающей границы, глубину до которой можно вычислить по формуле:

$$h = \frac{t_0 V_1}{2 \cos i_{кр}}, \quad (5)$$

где V_1 - скорость внутри колонны, определяемая по прямой волне, равна 15 см/нс, t_0 – 4 нс. Следовательно, глубина до отражающей границы внутри колонны, рассчитанная по формуле, равна порядка 35 см. При распо-

ложении источников и приёмников на смежной стороне, волновая картина для которой приведена на Рисунок 6, был получен аналогичный результат.

Глубина до границы, от которой получено отражение, соответствует глубине до пустоты с ошибкой около 10 %; типичной для метода t_0 . Скорость прямой волны в колонне, равная 15 см/нс, соответствует скорости в бетоне и граните.

Кроме скорости, «воздушная» волна отличается от волны в среде по амплитуде, поэтому в рассмотренном случае их относительно легко разделить, хотя на верхней радарограмме на больших удалениях отделение прямой волны от преломлённой затруднительно вследствие интерференции.

На Рисунок 6 приведены радарограммы, полученные при положении приёмников на соседней от источников стороне («сторона 2») для крайних и среднего положений источников (порядковые номера источников 1, 7 и 14).

На данных, полученных при положении источников 1 и 7 на небольших удалениях, в первых вступлениях приходит волна, годо-

граф которой представляет собой прямую линию, как и годограф преломлённой волны, однако её кажущаяся скорость равна 15 см/нс. Визуально энергетически она не отличается от прямой волны, приходящей в последующих вступлениях.

Для идентификации этой волны решалась прямая задача в случае лучевого приближения. Рассчитывались времена прихода трёх волн: прямой и двух преломлённых: первая преломлённая волна сначала проходит путь в воздухе, а потом под критическим углом входит в среду (показана красным), вторая преломлённая волна проходит часть пути в среде, а потом под критическим углом выходит из среды (показана синим цветом) и распространяется в воздухе.

Скорость в колонне по результатам анализа радарограмм на Рисунок 6 задавалась равной 15 см/нс, в воздухе 30 см/нс. Рассчитанные годографы преломлённых «воздушных» волн полностью совпали с прямыми осями синфазности на радарограммах, что позволило их идентифицировать и исключить из рассмотрения.

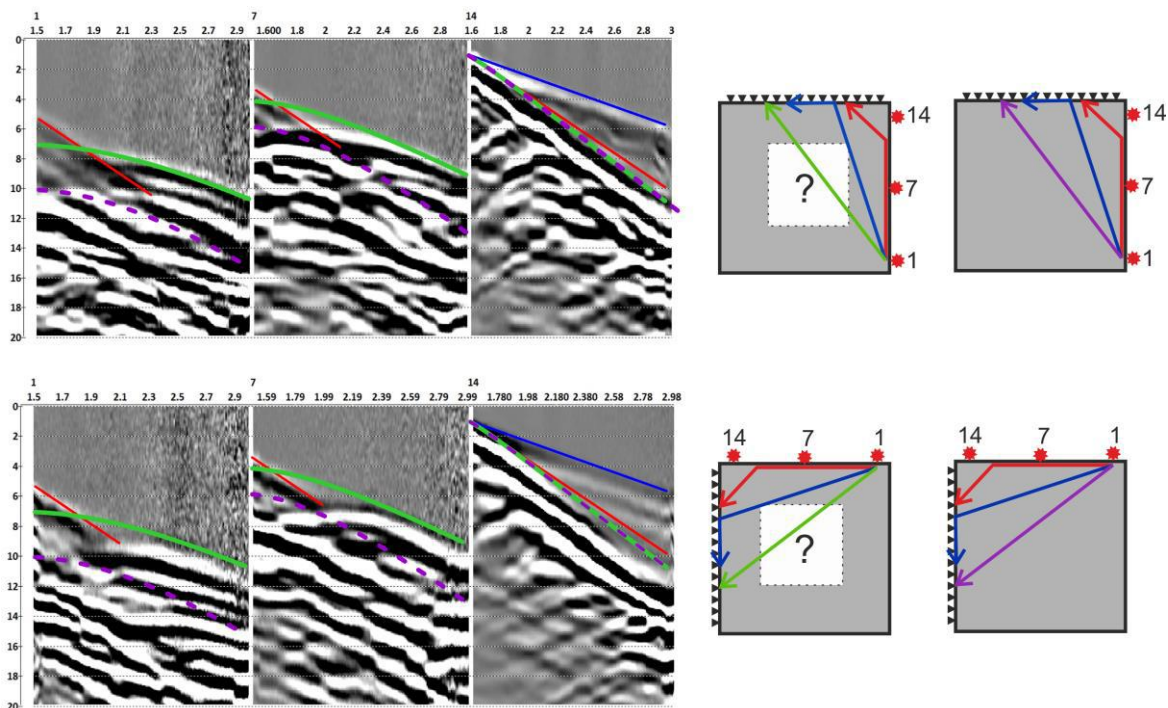


Рисунок 6. Экспериментальные волновые картины, полученные на стороне 2 квадратной

колонны и теоретические пикировки, рассчитанные для разных типов волн.

Времена прихода прямой волны, рассчитанные для скорости в колонне 15 см/нс, отличаются от времен прихода, наблюдаемых на радарограммах, в большую сторону, при этом форма наблюденного годографа подобна форме рассчитанного (показан фиолетовым пунктиром на радарограммах). Следовательно, эффективная скорость распространения электромагнитных волн в среде больше 15 см/нс, что указывает на присутствие высокоскоростной аномалии внутри колонны (пустоты). Времена вступления прямых волн на радарограммах от источников 1 и 7 соответствуют скорости 20 см/нс (годографы показаны зелёным цветом), а от источника 14 – 15 см/нс, следовательно, наблюдаемые прямые волны от источника 14 не пересекают аномалию. Радарограммы, полученные для положения приёмников на противоположной от источников стороне («сторона 3») и положения источников 1, 7 и 14, показаны на Рисунок 7. Здесь также рассчитывались времена вступления преломлённых волн (показаны красным и синим) и времена вступления прямой волны для скорости 15 см/нс (показаны фиолетовым пунктиром) и 20 см/нс (показаны зелёным). Результаты аналогичны полученным для стороны 2: рассчитанные годографы преломлённых волн совпадают с наблюдаемыми, средняя эффективная скорость прямых волн в среде около 20 см/нс. Данные, полученные при положении приёмников на стороне 4 (нижней на Рисунок 5, Рисунок 6, Рисунок 7), по структуре повторяют данные для стороны 2, поэтому они не приведены.

Круглая колонна

Данные, полученные на круглой колонне, имеют более простую структуру (Рисунок 8), одинаковую для всех положений источника. В первых вступлениях приходят волны, распространяющиеся между источником и приёмником по воздуху со скоростью 30 см/нс (показаны синим и красным цветами). Пря-

мая волна (показана зелёным цветом) значительно больше по амплитуде, приходит во вторых вступлениях со средней кажущейся скоростью 13 см/нс. Рассчитанный годограф прямой волны для этой скорости (зелёного цвета) наложен на радарограмму и почти полностью совпадает с осью синфазности прямой волны. Аналогичные волновые картины можно наблюдать в работе [18], в которой также описывается томографическое просвечивание на объекте цилиндрической формы – лизиметре с песком.

В центре оси синфазности прямой волны на всех радарограммах наблюдается "проседание" (показано зелёным пунктиром) – увеличение времени прихода волн за счёт увеличения длины луча, что указывает на наличие аномалии по центру колонны. Оранжевым цветом показаны отражения от границ гранитных блоков. В итоге, по результатам анализа данных и решения прямой задачи в лучевом приближении можно сделать следующие выводы:

- 1) Была определена природа осей синфазности, приходящих в первых вступлениях.
- 2) Были выделены прямые волны, являющиеся целевыми для дальнейшего томографического обращения. Времена их вступления были определены и в дальнейшем использованы для расчёта распределения скоростей электромагнитных волн в колонне.
- 3) Была определена средняя скорость в твёрдой части колонн – 15 см/нс для квадратной колонны и 13 см/нс для круглой, что соответствует скорости в бетоне и граните.
- 4) Были определены следующие признаки наличия пустоты внутри колонн: увеличение средней эффективной скорости в квадратной колонне на 5 см/нс, что косвенно указывает на наличие воздуха внутри, и увеличение времени пробега для лучей, пересекающих центр круглой колонны.

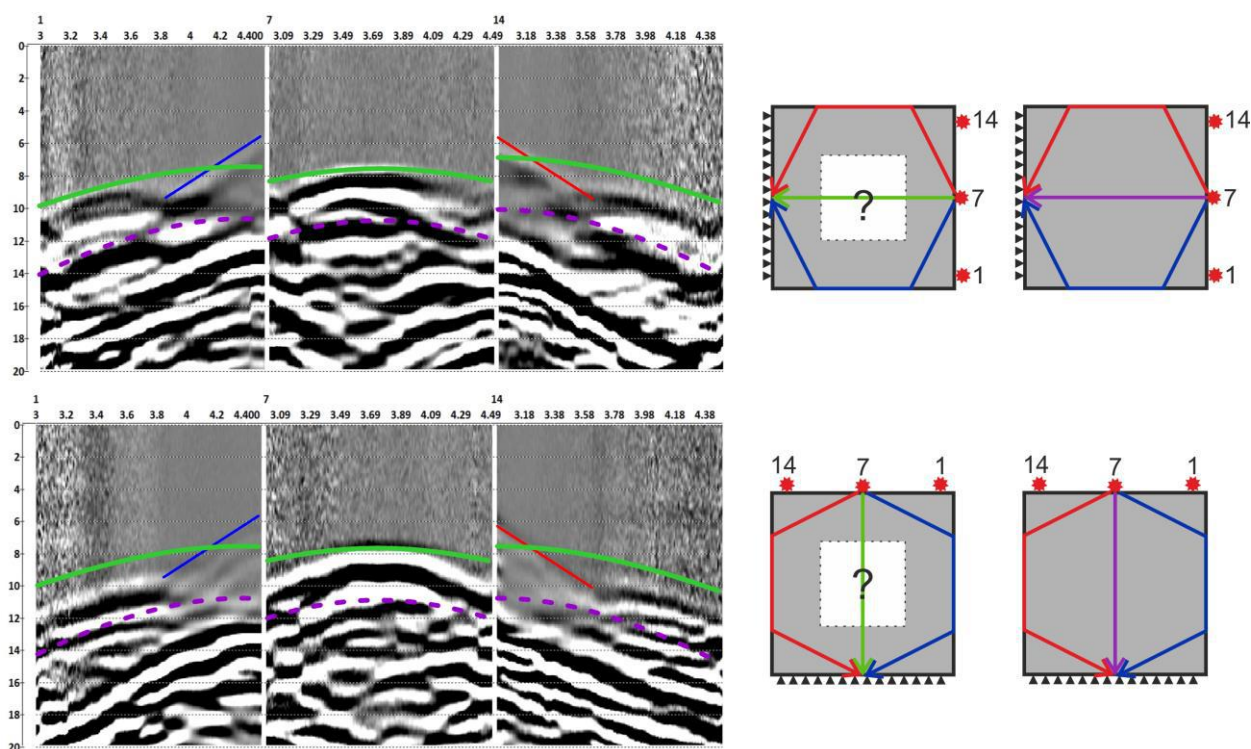


Рисунок 7. Экспериментальные волновые картины, полученные на стороне 3 квадратной колонны и теоретические пикировки, рассчитанные для разных типов волн.

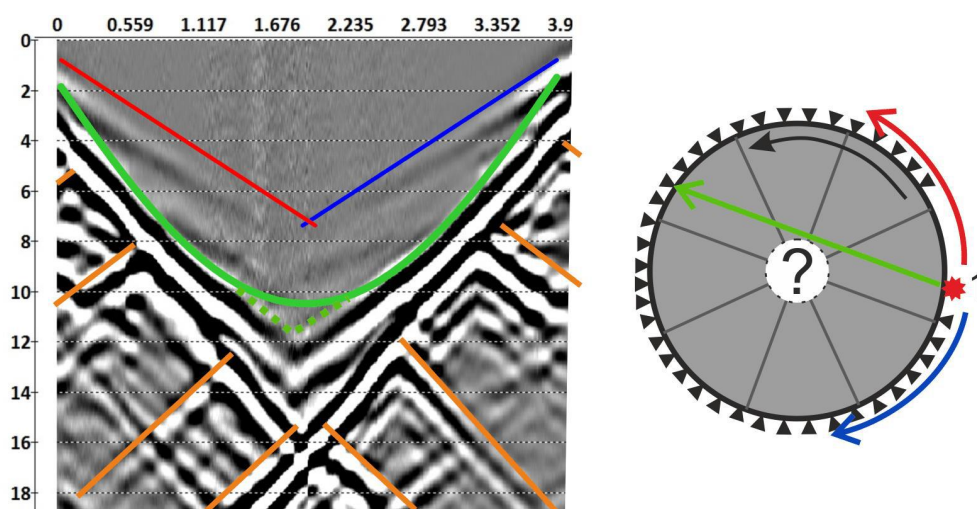


Рисунок 8. Экспериментальная волновая картина, полученная на круглой колонне в положении источника №1 и теоретические пикировки, рассчитанные для разных типов волн. Оранжевым цветом показаны оси синфазности волн, отражённых от границ гранитных блоков.

РЕЗУЛЬТАТЫ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ОБРАЩЕНИЯ

В томографическом обращении использовались времена прихода прямых волн. Расчёт вёлся в программе “GeoTomCG” (GeoTom,

LLC). Основные принципы и алгоритмы расчетов изложены в статье [20]. Программа подразумевает расчет по регулярной сетке с использованием прямоугольных ячеек. Начальная модель задавалась с постоянной скоростью 17 см/нс в случае квадратной ко-

лонны и 12 см/нс в случае круглой колонны. Скорость рассчитывалась как среднее арифметическое из скоростей, полученных путём деления расстояния между источником и приёмником (длины прямого луча) на время первого вступления. Один из вопросов расчёта по регулярной сетке - это выбор размера ячейки, ведь разрешение томографических изображений пропорционально числу и размеру ячеек [11]. Кроме расстояния между точками приёма, минимальный размер ячейки определяется средней длиной волны сигнала, точностью пикирования первых вступлений, а также величиной средней скорости. Для обнаружения аномалии необходимо, чтобы кинематический эффект от неё превышал точность пикирования. Минимальный размер аномалии (Δl), дающий отклик в кинематике лучей, проходящих через нее, можно рассчитать согласно уравнению:

$$\Delta l = \frac{\Delta t}{\Delta v} (V_a * V_m), \quad (6)$$

где V_a - скорость в аномальном объекте, V_m - средняя скорость в среде, $\Delta v = |V_a - V_m|$, Δt - погрешность пикировки первого вступления.

Размер ячейки, используемой для реконструкции аномалии, напрямую зависит от Δl и очевидно, что нет никакой необходимости использовать величину ячейки много меньше [11].

Точность пикировки равна примерно половине дискрета по времени - 0.29 нс, скорость в аномалии - 30 см/нс, за средние скорости были взяты 17 см/нс и 12 см/нс для квадратной и круглой колонн соответственно. В итоге, Δl для квадратной колонны равна около 11 см, для круглой - 6 см. Исходя из этих расчётов, было принято решение выбрать размер ячейки 5x5 см в обоих случаях. Скоростной разрез для квадратной колонны считался более чем по 2500 независимым лучам, для круглой - по 1500.

Всего было проведено 11 итераций для каждой из колонн: первая на прямых лучах, последующие на кривых. Алгоритм программы рассчитан таким образом, что для каждой следующей итерации уменьшается среднеквадратичная невязка между рассчитанными и наблюдаемыми временами. Графики изменения среднеквадратичной невязки и суммы невязок представлены на Рисунок 9.

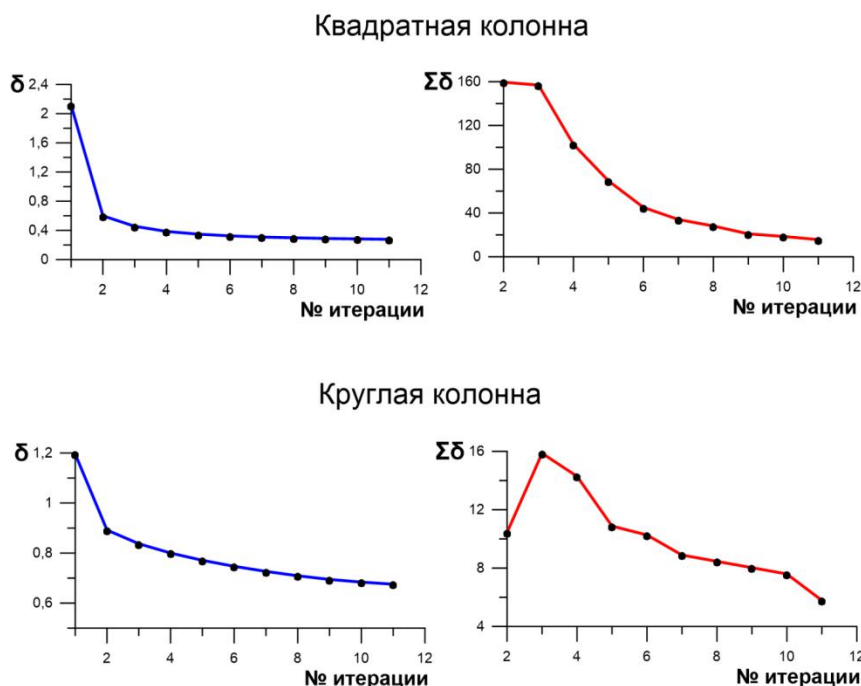


Рисунок 9. Зависимость среднеквадратичной погрешности расчёта (δ) и суммы всех погрешностей ($\Sigma\delta$) от номера итерации.

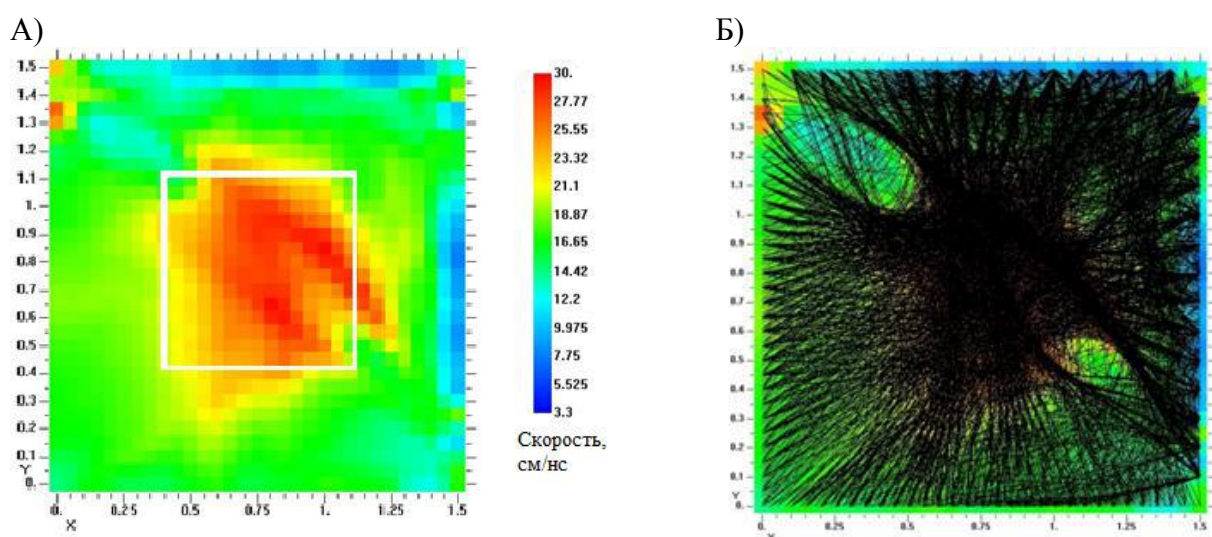


Рисунок 10. Результат томографического обращения (А) и траектории распространения лучей (Б) в квадратной колонне.

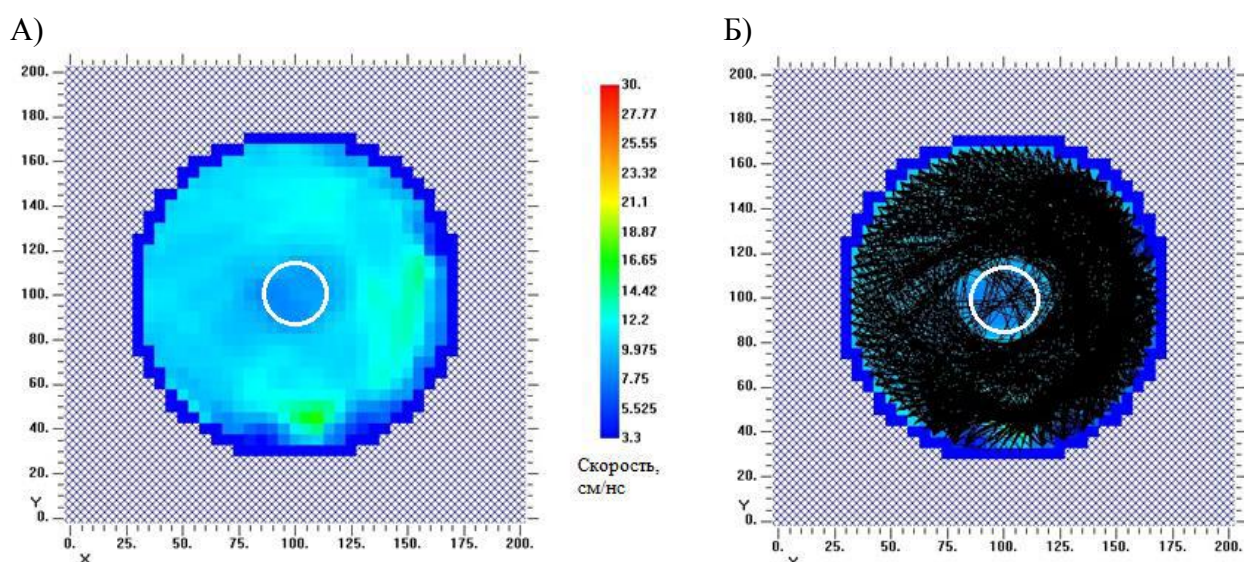


Рисунок 11. Результат томографического обращения (А) и траектории распространения лучей (Б) в круглой колонне.

Для квадратной колонны среднеквадратичная невязка в конце расчёта составляла 0.3 нс, сумма невязок - 15 нс, для круглой 0.7 нс и 5.8 нс, соответственно.

Полученные скоростные разрезы и траектории лучей показаны на Рисунок 10 и Рисунок 11. Белыми рамками показаны известные границы пустот. В центре скоростного разреза квадратной колонны отчётливо выделяется высокоскоростная аномалия со скоростями 25-30 см/нс, которая может быть проин-

терпретирована как воздушная полость. Появление этой аномалии свидетельствует о том, что задача обнаружения воздушной полости решается уверенно. На границе твёрдая часть/воздух скорость 20 см/нс и внутри почти всей твёрдой части скорость равна полученной ранее - 15 см/нс.

Средняя скорость в пустоте с железными стенками (круглая колонна, Рисунок 11) отличается от скорости в твёрдой части незначительно (8 см/нс против 11 см/нс), однако

Таблица 1. Результаты томографического обращения.

	Квадратная колонна		Круглая колонна	
	Значение	Погрешность абсолютная (относительная)	Значение	Погрешность абсолютная (относительная)
Скорость в твёрдой части	15.5см/нс	0.5см/нс(3.3%)	11см/нс	2см/нс (15%)
Скорость в воздушной полости	25см/нс и выше	От 0 до 5см/нс (От 0 до 17%)	8см/нс	21см/нс (70%)
Размер воздушной полости	Площадь - 52см ²	3см / 6%	Радиус - 37см	7см (23%)

лучевое покрытие отличается принципиально: полость пересекает менее 10 % лучей, являющихся результатом ошибки алгоритма расчёта. По лучевому покрытию можно оконтурить область круглой формы с минимальным лучевым покрытием: радиус этой области равен около 37 см. Скорость в твёрдой части меняется от 9 до 16 см/нс, средняя скорость - 11 см/нс, что соответствует скорости в бетоне и на 2 см/нс меньше определённых ранее 13 см/нс.

Результаты георадиолокационной томографии с абсолютными и относительными ошибками определения приведены в таблице 1.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результат георадарной томографии принципиально отличается от результатов георадиолокационной съёмки с совмещенным источником и приёмником, которая не позволяет хорошо восстановить свойства изучаемой среды.

В случае квадратной колонны, все задачи кроме точного определения формы были решены успешно - ошибки в определении скорости в твёрдой части и площади пустоты не превышают 6%, максимальная ошибка в определении скорости в воздухе - 5 см/нс (17%).

В случае круглой колонны, как и ожидалось, скорость в пустоте не была определена верно из-за железных стенок, наличие которых увеличивает длину лучей, а, следовательно, уменьшает получаемую скорость. При этом по анализу лучевого покрытия была выделена аномалия, форма и положение которой точно соответствуют конструктивной пустоте, а радиус отличается в большую сторону на 7 см (23%). Скорость в граните отличается от определённой ранее на 2 см/нс (15%).

В результате расположения точек измерений по периметру колонн, были определены не только параметры конструктивных пустот, но и правильно рассчитана скорость в твёрдой части конструкции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы было доказано, что задача поиска, оконтуривания и определения размеров пустот внутри строительных конструкций хорошо решается при помощи георадарной томографии. Полости выделяются по скорости, соответствующей скорости распространения электромагнитных волн в воздухе - 25-30 см/нс, а полости с железными стенками - по крайне малому лучевому покрытию.

Несмотря на наличие высококонтрастной аномалии внутри строительных конструкций, применённая методика позволила с вы-

сокой точностью определить скорость в твёрдой части колонн (бетоне и граните), которая может быть использована для пересчёта в физические свойства, такие как влажность, пористость и пр.

Использование томографической методики требует увеличения числа точек зондирования, решения прямой задачи для избавления от неоднозначности в выделении полезных волн. Помимо стандартных программ обработки георадиолокационных данных требуется специальное программное обеспечение для расчёта распределения скоростей электромагнитных волн внутри конструкции. Однако, получаемые результаты - количественные и лишены обычной неоднозначности, свойственной косвенным методам исследования, поэтому являются более достоверными по сравнению с результатами георадиолокационного зондирования с совмещённым источником и приёмником.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Annan A.P.** Ground penetrating radar workshop notes, Ontario, Sensors & Software Inc., 2001, 192 pages.
2. **Barrile V., Pucinotti R.** Application of radar technology to reinforced concrete structures: A case study. // *NDT & E International*, 38(7), 2005, pp. 596-604.
3. **Bohidar R.N., Hermancez J.F.** The GPR refraction method. // *Geophysics*, vol. 67, no. 5 (september-october 2002), pp. 1474-1485
4. **Chao-Ying Bai, Greenhalgh S.** 3-D Non-linear Travel-time Tomography: Imaging High Contrast. // *Pure and Applied Geophysics*, 162, 2005, pp. 2029-2049.
5. **Fischer R., Lees J.M.** Shortest Path Ray Tracing with Sparse Graphs. // *Geophysics*, 58, 1994, pp. 987-996.
6. **Gruber T., Greenhalgh S.A.** Short Note: Precision Analysis of First-break times in Grid Models. // *Geophysics*, 63, 1998, pp. 1062-1065.
7. **Hamrouche R., Klysz G., Balayssac J.-P., Rhazi J., Ballivy G.** Numerical Simulations and Laboratory Tests to Explore the Potential of Ground- Penetrating Radar (GPR) in Detecting Unfilled Joints in Brick Masonry Structures. // *International Journal of Architectural Heritage: Conservation, Analysis, and Restoration*. 6:6, 2012, pp. 648-664.
8. **Helmholtz H.** Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. // In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 57, Heft 1, 1860, pp. 1-72.
9. **Hugenschmidt J.** Concrete bridge inspection with a mobile GPR system. // *Construction and Building Materials*, 16, 2012, pp. 147-154.
10. **Hugenschmidt J., Loser R.** Detection of chlorides and moisture in concrete structures with Ground penetrating radar. // *Materials and Structures*. 41, 2008, pp. 785-792.
11. **Lehmann B.** Seismic traveltime tomography for engineering and exploration application. // *EAGE publications*, 2007, pp. 273.
12. **Maierhofer C., Leipold S.** Radar investigation of masonry structures. // *NDT & E International*, 34(2), 2001, pp. 139-147.
13. **Mathewson J.C., Evans D., Leone C., Leathard M., Dangerfield J., Tønning S.A.** Improved imaging and resolution of overburden heterogeneity by combining amplitude inversion and tomography. // *SEG 2012 Annual Meeting*, 5, 2012, Las Vegas, pp. 4271-4274.
14. **Moser T.J.** Shortest Path Calculation of Seismic Rays. // *Geophys.*, 56, 1991, pp. 59-67.
15. **Nolet G.** A breviary of seismic tomography, imaging the Interior of the Earth and Sun. Cambridge, Cambridge University Press, 2008.

16. **Roberts R., Corcoran K., Arvanitis M., Schutz A.** Insulated Concrete form Void Detection Using Ground Penetrating Radar. // PERS Proceedings, Marrakesh, MOROCCO, March 20-23, 2011.
17. **Santos-Assunção S., Perez-Gracia V., Caselles O., Clapes J., Salinas V.** Assessment of Complex Masonry Structures with GPR Compared to Other Non-Destructive Testing Studies. // Remote Sensing. 6, 2014, pp. 8220-8237.
18. **Schmalholz J., Stoffregen H., Kemna A., Yaramanci U.** Imaging of water content distributions inside a lysimeter using GPR tomography. // Vadose zone journal, Vol. 3 No. 4, 2004, pp. 1106-1115.
19. **Starovoytov A.V., Romanova A.M., Kalashnikov A.Yu.** GPR study of depressed areas in the upper cross-section. // EAGE Near Surface. Manchester, UK. 2011.
20. **Tweeton D.R., Jackson M.J., Roessler K.S.** BOMCRATR – A Curved Ray Tomographic Computer Program for Geophysical Applications. // USBM RI 9411, 39, 1992.
21. **Wenfrich A., Trela Ch., Krause M., Maierhofer Ch., Effner U., Wostmann J.** Location of Voids in Masonry Structures by Using Radar and Ultrasonic Traveltime Tomography. // In Tu.3.2.5 Bundesanstalt für Materialforschung und – prüfung (BAM), Berlin, Germany, 2006.

Москва. Ленинские горы, д. 1; Тел.: +7(495)939-43-70;
E-mail: genia_teren@mail.ru

Калашников Алексей Юрьевич, младший научный сотрудник, кафедра сейсмометрии и геоакустики геологического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; Россия, 119991, Москва. Ленинские горы, д. 1; Тел.: +7(495)939-12-30; E-mail: x_kalash@mail.ru

Sudakova Maria Sergeevna, PhD, Research Fellow, Department of Seismometry and Geoacoustic, Geology faculty, Moscow State University M.V.Lomonosov, Earth Cryosphere Institute SB RAS, 1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia; Phone +7(495)939-12-30; E-mail: m.s.sudakova@yandex.ru

Terentieva Eugeniya Borisovna, PhD, Senior Professor, Department of Seismometry and Geoacoustic, Geology faculty, Moscow State University M.V. Lomonosov; 1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia; Phone +7(495)939-43-70; E-mail: genia_teren@mail.ru

Kalashnikov Alexey Yurievich, Junior Research Fellow, Department of Seismometry and Geoacoustic, Geology faculty, Moscow State University M.V. Lomonosov; 1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia; Phone +7(495)939-12-30; E-mail: x_kalash@mail.ru

Судакова Мария Сергеевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, кафедра сейсмометрии и геоакустики геологического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; Россия, Институт Криосферы Земли Сибирского отделения РАН, 119991, Москва. Ленинские горы, д. 1; Тел.: +7(495)939-12-30; E-mail: m.s.sudakova@yandex.ru

Терентьева Евгения Борисовна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра сейсмометрии и геоакустики геологического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; Россия, 119991,

THE IMPACT OF COUPLING THERMOELASTICITY EQUATIONS ON SETTLEMENT OF STRUCTURES ON FROZEN SOIL

Roman N. Stepanov, Fedor B. Kiselyov, Filipp V. Sergeyev

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, RUSSIA

Abstract: This paper seeks to propose a numeric model for the determination of structure's settlement on frozen soil. The settlement is driven by the dead weight of the soil, weight of the erected building and thawing of the soil underneath the building due to its heating. A benchmark task was solved both in coupled and uncoupled problem settings. A special analysis is dedicated to the impact of thermoelasticity equations being coupled or independent.

Key words: multiyear frozen soils, thermoelasticity, structure settlement, thawing

ВЛИЯНИЕ СВЯЗАННОСТИ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ НА ОСАДКУ СООРУЖЕНИЯ НА МЕРЗЛОМ ГРУНТЕ

Р.Н. Степанов, Ф.Б. Киселёв, Ф.В. Сергеев

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
г. Москва, РОССИЯ

Аннотация: В данной работе предложена численная модель для определения осадки сооружения на мерзлом грунте. Осадка происходит за счет действия собственного веса грунта, веса возведенного сооружения и за счет оттаивания грунта под фундаментом сооружения из-за его разогрева. Была решена модельная задача в связанной и несвязанной постановке. Проанализировано влияние эффекта связанности уравнений термодинамики.

Ключевые слова: многолетнемерзлые грунты, термодинамика, осадка сооружения, процесс оттаивания

1. PROBLEM SETTING

Expression [1] presents thermoelasticity equations linearized around the initial temperature T_0 of the undeformed state. These equations describe soil deformation driven by the temperature gradient T and bulk forces. By generalizing the equations for the case of partially frozen soil, we obtain the following system:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}^{th(f)} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = 3\alpha^{th(f)} K^{th(f)} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x_i} - \rho F_i \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{th(f)} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x_j} \right) + q_v = 3\alpha^{th(f)} K^{th(f)} T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \\ + \rho c^{th(f)} \frac{\partial}{\partial t} (T - T_0) \end{cases} \quad (1)$$

where

$$C_{ijkl}^{th(f)} = \frac{\nu^{th(f)} E^{th(f)}}{(1 + \nu^{th(f)})(1 - 2\nu^{th(f)})} \delta_{ij} \delta_{kl} + \\ + \frac{E^{th(f)}}{2(1 + \nu^{th(f)})} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

– elastic modulus tensor of frozen or thawed soil; $k^{th(f)}$ – tensor permeability coefficient of thawed or frozen soil; $\alpha^{th(f)}$ – linear thermal expansion coefficient of thawed or frozen soil; $c^{th(f)}$ – specific heat capacity of thawed or frozen soil;

$$K^{th(f)} = \frac{E^{th(f)}}{3(1-2\nu^{th(f)})}$$

– cubical expansion (compression) coefficient of thawed or frozen soil; q_v – power of inner heat sources in a volumetric unit; ρ – density of dry soil. The target values of these equations are soil displacements $\bar{u}$ and temperature T . Based on the papers [2-4], the analytical dependency (2) for the heat capacity coefficient takes account of ice-water phase transitions when crossing the ground thawing temperature:

$$c^{th(f)} = c^{(f)} + L_0 \frac{\partial W_w}{\partial T}, \quad (2)$$

where $L_0 = 335 \cdot 10^6 \text{ J / m}^3$,

while the total content of the unfrozen water depends on the temperature and is given by the formula:

$$W_w = k_w W_p, \quad (3)$$

where W_p – humidity at the lower plastic limit of soil when rolled into threads, W_w – soil humidity due to unfrozen water, K_w – unfrozen water content coefficient identified for various temperatures according to Table 3.1. in [5]. The analytical dependency established between the Young's modulus $E^{th(f)}$ and temperature and interpolating experimental data is presented in [6]. Analogous curves were constructed for Poisson's ratio $\nu^{th(f)}$ and thermal conductivity $\lambda^{th(f)}$ in [7]. The problem setting is finalized by standard initial and boundary conditions. The equations (1) of the task are coupled. They do not allow for the possibility to ascertain the thermal field independently without finding the soil deformations.

While accepting a simplified hypothesis that thermal field is independent from soil deformations, we can relax it and solve the equations

independently one from the other: first, we determine the thermal field based on the heat propagation equation, and then identify structure's settlement via the Duhamel Neumann-type equation of equilibrium. In this case, the system of equations in question takes the following form:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}^{th(f)} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = 3\alpha^{th(f)} K^{th(f)} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x_i} - \rho F_i \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{th(f)} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x_j} \right) + q_v = \rho c^{th(f)} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial t} \end{cases} \quad (4)$$

2. NUMERICAL SOLUTION

For solving the system (1), Euler's implicit method was applied for time discretization of the task $t^{n+1} = t^n + \Delta t$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}^{th(f)} \frac{\partial u_k^{n+1}}{\partial x_l} \right) - \\ - 3\alpha^{th(f)} K^{th(f)} \frac{\partial (T^{n+1} - T_0)}{\partial x_i} = -\rho F_i \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-3\alpha^{th(f)} K^{th(f)} T_0 \frac{u_i^{n+1}}{\Delta t} + \lambda_{ij}^{th(f)} \frac{\partial (T^{n+1} - T_0)}{\partial x_j} \right) - \\ - \frac{\rho c^{th(f)}}{\Delta t} (T^{n+1} - T_0) = \\ = -3\alpha^{th(f)} K^{th(f)} T_0 \frac{u_i^n}{\Delta t} - \frac{\rho c^{th(f)}}{\Delta t} (T^n - T_0) - q_v, \end{cases}$$

Where the superscript $n+1$ of the target k^{th} displacement vector component u_k^{n+1} as well as of the temperature T^{n+1} means that the values of these functions were utilized till the $n+1^{\text{th}}$ time increment. This equation can be presented as a block matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}^{th(f)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \right) & -\frac{\partial}{\partial x_i} (3\alpha^{th(f)} K^{th(f)}(\cdot)) \\ -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(3\alpha^{th(f)} K^{th(f)} T_0 \frac{\partial(\cdot)}{\Delta t} \right) & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{th(f)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} \right) - \frac{\rho c^{th(f)} n}{\Delta t} (\cdot) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^{n+1} \\ T^{n+1} - T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

Where the vector of the right hand side is equal to

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho F_i \\ -3\alpha^{th(f)} K^{th(f)} T_0 \frac{u_i^n}{\Delta t} - \frac{\rho c^{th(f)}}{\Delta t} (T^n - T_0) - q_v \end{pmatrix}.$$

The discretization of the spatial variables is accomplished by the method of finite elements and use of standard isoparametric brick-type finite elements. To find a solution, which is a column vector of variables

$$\begin{pmatrix} u_k^{n+1} \\ T^{n+1} - T_0 \end{pmatrix},$$

using Gaussian method for solving systems of linear algebraic equations proves sufficient. The problem's coefficients are temperature functions. Their value for the current time increment is calculated based on the solution to the problem found for the previous time increment. For this reason, an internal iteration process was introduced, so that the numeric and exact solutions would match at each time increment.

3. BENCHMARK PROBLEM

The problem of finding the building settlement on frozen soil makes use of the numeric model constructed earlier. The settlement is driven by the dead load of the soil, weight of the erected facility and soil thawing under the building's foundation due to its heating. The foundation without heat insulation is warmed up because the temperature inside the facility exceeds that of outside. The calculation performed for the model employs both coupled and independent equations. Figure 1 displays one fourth of the

computational domain. The soil is modeled as a three-layer environment with thermomechanical constants, the values of which can be found in Table 1. Initial temperature distribution T_0 within the domain (see Figure 2) is considered at the first stage of the numeric algorithm employed when solving the thermal conductivity equation for a specific temperature and heat flow at the boundary of the domain. The upper horizontal boundary of the domain (soil surface) maintains the temperature $+2^\circ\text{C}$, while the lower horizontal boundary of the domain (foot of the multiyear frozen soil) keeps the temperature -2°C . This temperature range suggests that the multiyear frozen soil commences 10 m below the earth surface. The second stage of the numeric algorithm solves the problem of heating the surface layer of soil under the foundation bed by the temperature $+20^\circ\text{C}$ applied continuously. The second stage starts after the construction has been completed and the structure has been commissioned. The calculation is performed till the temporal solution is found, which is assumed to be 30 years in this model. Figures 3-6 display the vertical displacement pattern and temperature pattern 30 years after the construction completion. The data in Figures 3 and 4 were obtained when solving the task in the coupled problem setting, while those of Figures 5 and 6 were derived from the solution in the uncoupled problem setting. The analysis of the obtained data brings about the conclusion that the benchmark problem features the soil thawing depth being equal to 15 m for the coupled problem setting and 14 m for the uncoupled problem setting. Relative differential settlement of the facility for the solution in the coupled problem setting is 17,5 cm, while the same for the uncoupled task setting is 13 cm.

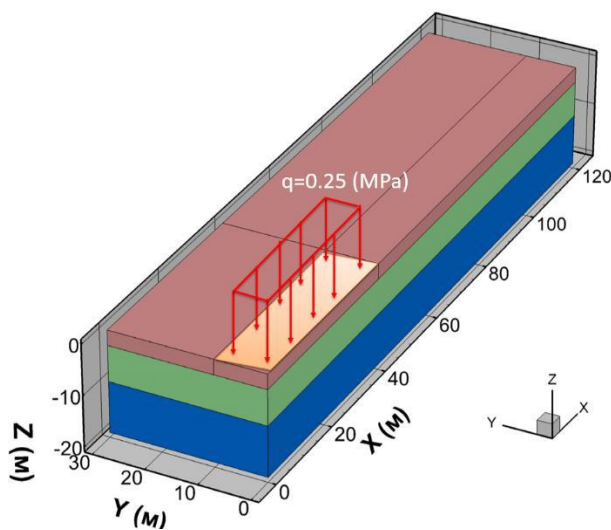


Figure 1. 1/4 of the computational domain, with distributed surface pressure applied. The surface taken up by the structure is depicted in yellow.

1	2	3	4
Linear thermal expansion coefficient $\alpha^{th(f)}$, $1/^\circ\text{C}$	0	0	0.0009

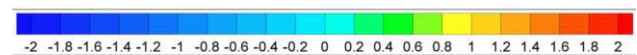
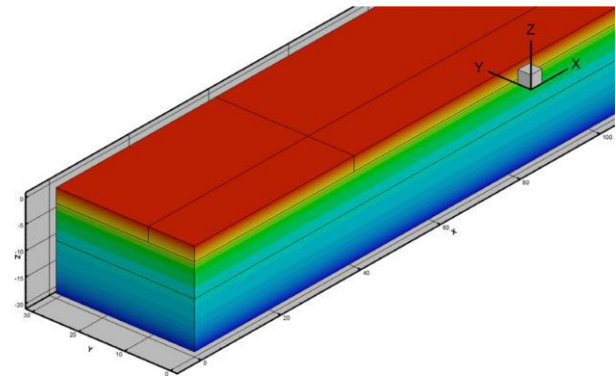


Figure 2. Initial temperature distribution across the computational domain, $^\circ\text{C}$.

Constants of soil layer	Crushed stone or grus fill material	Clayey sand	Grus with clayey sand fill (multiyear frozen)
1	2	3	4
Soil depth, m	3	7	10
Density ρ , kg/m^3	2220	2120	2360
Deformation modulus $E^{th(f)}$, mPa	40	30.6	30
Poisson coefficient $\nu^{th(f)}$	0.4	0.4	0.4
Specific heat capacity $c^{th(f)}$, $\text{J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$	918	1076.6	960
Heat transmission $\lambda^{th(f)}$, $\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$	1.8	1.74	1.48

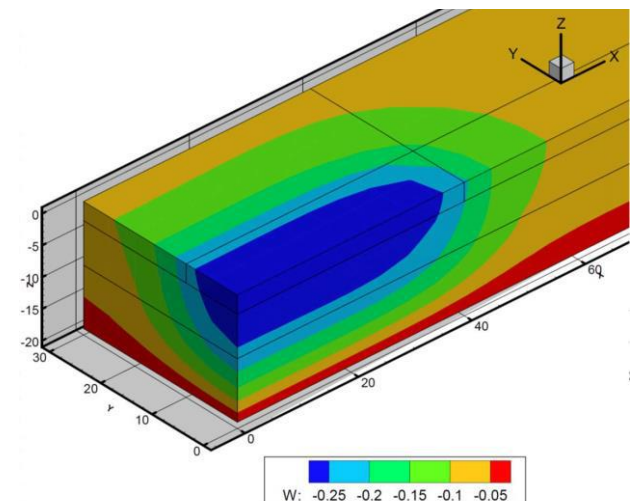


Figure 3. Vertical displacements (m) in the soil 30 years after construction completion. Solution in the coupled problem setting. Relative settlement equal to 17.5 cm.

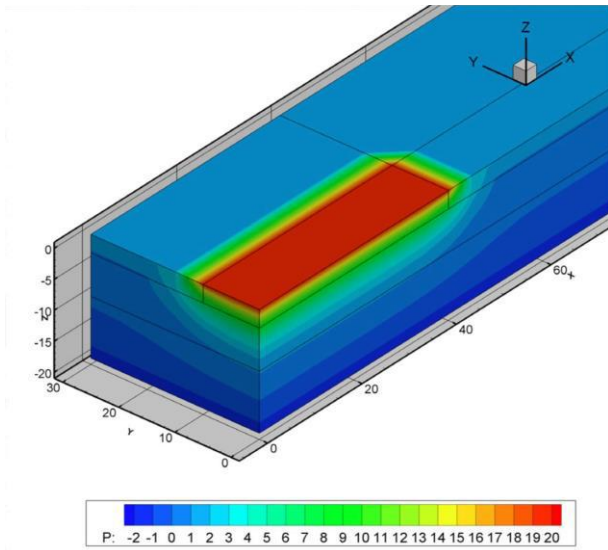


Figure 4. Temperature distribution ($^{\circ}\text{C}$) in the soil 30 years after construction completion. Solution in the coupled problem setting. Thawing depth found to be 15 m.

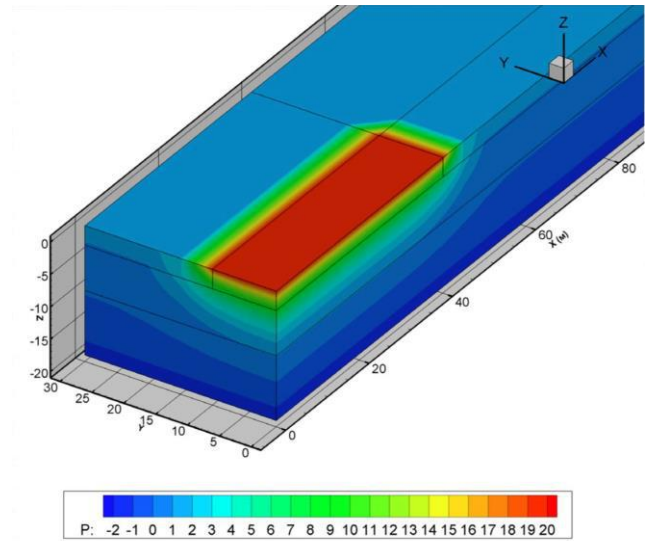


Figure 6. Temperature distribution ($^{\circ}\text{C}$) in the soil 30 years after construction completion. Solution in the uncoupled problem setting. Thawing depth found to be 14 m

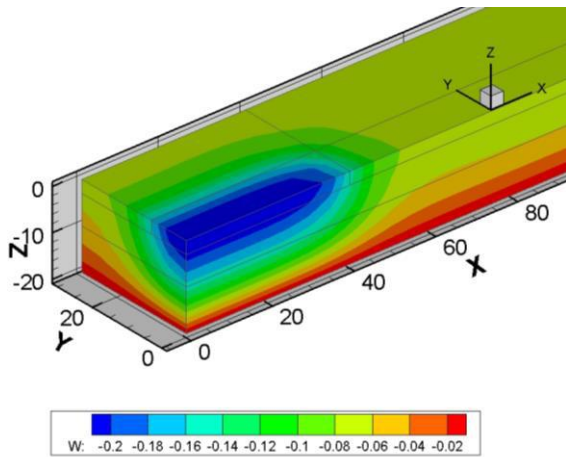


Figure 5. Vertical displacements (m) in the soil 30 years after construction completion. Solution in the uncoupled problem setting. Relative settlement of the structure found to be 13 cm.

4. CONCLUSION

The analysis of the results obtained gives rise to the following conclusions. If taken account of, the thermomechanical term

$$3\alpha^{th(f)}K^{th(f)}T_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$$

of the heat propagation equation changes the value of thawed soil settlement up to 25%. The effect of coupling the thermoelasticity equations intensifies with the increase in deformation exerted on the soil by the bulk and surface forces in a unit of time. Equilibrium equations of elasticity theory for the determination of soil settlement make it possible to estimate 3-dimensional soil thawing-driven deformation. In contrast, the same cannot be achieved via models employing the method of layer-by-layer addition.

REFERENCES

1. **Fadeyev A.B.** Finite elements method in geomechanics, Moscow, Nyedra, 1987, 224 pages (in Russian).
2. **Kiselyov M.F.** Compressibility theory for thawing soils under pressure. Leningrad, Stroyizdat, 1978, 174 pages (in Russian).
3. **Kudryavtsev S.A., Paramonov V.N., Sakharov I.I., Shashkin A.G.** Methods of finite elements applied to tasks of geotech-

- nics, Khabarovsk, DVGUPS, 2014, 162 pages (in Russian).
4. **Melnikov A.V., Sakharov I.I.** Parameter determination for strain-stress state of frost susceptible heaving soil in a multidimensional problem setting. // Contemporary problems of science and education, Number 1, 2013, 7 pages.
 5. **Novatsky V.** Elasticity theory, Moscow, Mir, 1975, 872 pages (in Russian).
 6. SNIP 2.02.04-88. Bases and foundations on permafrost soil, Moscow, APP TSITP, 1990 (in Russian).
 7. **Velli Y.Y., Dokuchayev V.V., Fyodorov N.V.** Buildings and structures in the Extreme North, Leningrad, Gosstroyizdat, 1963, 492 pages (in Russian).

университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(495)287-49-14, доб. 3074;
E-mail: stroimeh@mgsu.ru

Сергеев Филипп Сергеевич, ассистент кафедры строительной и теоретической механики; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(495)287-49-14, доб. 3074; E-mail: stroimeh@mgsu.ru

Roman N. Stepanov, Ph.D., Associate Professor, Department of Structural and Theoretical Mechanics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russia; Phone +7(495)287-49-14 add. 3074;
E-mail: stroimeh@mgsu.ru

Fedor B. Kiselyov, Ph.D., Associate Professor, Department of Structural and Theoretical Mechanics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russia; Phone +7(495)287-49-14 add. 3074;
E-mail: stroimeh@mgsu.ru

Filipp V. Sergeyev, Assistant, Department of Structural and Theoretical Mechanics, National Research Moscow State University of Civil Engineering; 26, Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russia; Phone +7(495)287-49-14 add. 3074;
E-mail: stroimeh@mgsu.ru

Степанов Роман Николаевич, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; тел. +7(495)287-49-14, доб. 3074;
E-mail: stroimeh@mgsu.ru

Киселев Федор Борисович, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики; Национальный исследовательский Московский государственный строительный



**ЛАУРЕАТЫ XX КОНКУРСА НА МЕДАЛИ И ДИПЛОМЫ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ АРХИТЕКТУРЫ
И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК (РААСН)
НА ЛУЧШИЕ НАУЧНЫЕ И ТВОРЧЕСКИЕ РАБОТЫ
В ОБЛАСТИ АРХИТЕКТУРЫ, ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВА
И СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК ЗА 2016 ГОД**

В ОБЛАСТИ АРХИТЕКТУРЫ

В номинации «Лучший архитектурный проект, осуществленный в строительстве»

ЗОЛОТАЯ МЕДАЛЬ РААСН

Объект: Стадион ЦСКА – «Арена ЦСКА»

Авторский коллектив: А.В. Боков, Д.В. Буш, С.Н. Чуклов, А.В. Орлов, Е.Е. Бекмухамедов, М.И. Кельман (ГУП МНИИП «Моспроект-4», мастерская № 6, Москва)

Проект стадион ЦСКА размещается на границе территории Ходынского поля, планировка которого также была разработана авторами. Градостроительное решение объекта на чрезвычайно затесненном участке выполнено грамотно и профессионально, и учитывает, как ансамбль Ходынского поля, так и застройку на 3-ей Песчаной улице. Башня стадиона замыкает перспективу бывшей взлетно-посадочной полосы Ходынского поля и активно включается в панорамы окружающей застройки. Стадион представляет собой новый для российской и зарубежной практики тип спортивных сооружений, включающих несколько взаимоисключающих функций, с задачей взаимоувязки которых в объеме здания, а также в разведении потоков транспорта и пешеходов блестяще справились авторы. Новаторское конструктивное решение не только противодействует эффекту прогрессирующего разрушения конструкции, но и определяет архитектуру фасадов стадиона. Авторами решена задача обеспечения зрителей и сотрудников офисного и гостиничного комплекса необходимым числом автостоянок: 2-х уровневый подземный паркинг и отдельно стоящая многоуровневая открытая парковка, соединенная со стадионом системой мостовых переходов. Авторы создали выразительный и лаконичный архитектурный образ современного спортивного сооружения.

СЕРЕБРЯНАЯ МЕДАЛЬ РААСН

Объект: Музейный комплекс «Поле Куликовской битвы»

Авторский коллектив: С.В. Гнедовский, И.В. Буиминский, А.А. Любимкин, Е.С. Любимкина, А.Б. Бехтина, С.Ю. Гнедовский (ООО «Архитектура и культурная политика ПНКБ», Москва)

Перед авторами музейного комплекса «Поле Куликовской битвы» стояла сложная задача - выразить в архитектурном образе тесное сплетение исторических реалий и национального мифа. Объемно-пространственная композиция комплекса представляет собой два противопоставленных объема корпусов музеев, призванных создать образ драматического столкновения двух масс, объединенных единым путем подхода, открывающим перспективу на Куликово поле. Объемы корпусов частично скрыты рельефом, что создает впечатление растворения в ландшафте и исторической среде. Авторы сумели соединить создание сложного эмоционального архитектурного образа и многочисленные функциональные задачи работы музейного комплекса. На первом этаже расположена входная группа, выставочный зал с помещениями для хранения экспонатов, необходимые технические помещения. На антресольном этаже – административные и вспомогательные помещения. Устроенная на крыше выставочного блока смотровая площадка обеспечивает обзор поля сражения. Для маломобильной группы посетителей предусмотрены пандус-тропинка и лифт, поднимающийся из зоны гардероба и вестибюля. В корпус экспозиционного блока входят: входная группа, экспозиционный зал с помещениями для хранения экспонатов, конференц-зал на 100 человек для лекционной работы, кафе и комнату охраны. На подземном уровне размещены магазин сувениров и вестибюль с гардеробом. Главным элементом, организующим пространство экспозиционного зала, является пандус, объединяющий залы, в которых представлена история сражения. Важное место в создании выразительного образа музейного комплекса «Куликово поле» занимает световое решение: «световые» копы, акцентная подсветка малых архитектурных форм, световоды экспозиционного пространства, подсветка фасадов прожекторами, имеющими возможность смены цвета, использование красного света, придающего драматическую напряженность архитектурному образу. Авторам музейного комплекса «Куликово поле» удалось средствами архитектуры представить одно из важнейших событий русской истории.

Диплом РААСН

Объект: Музейный историко-мемориальный комплекс героическим защитникам Севастополя «35-я береговая батарея»

Авторский коллектив: А.И. Хомяков, Ю.С. Гелета (Москва), В.И. Лошанюк (Севастополь)

Мемориально-музейный комплекс «35-я береговая батарея» был построен в Старом Херсонесе (Севастополе) в 2012 году, последнем участке севастопольской обороны 1941-42 годов, унесший десятки жизней его защитников, проявивших массовый и беспримерный героизм. События Великой Отечественной войны, древняя античная топография и новаторское архитектурно-градостроительное решение сделали комплекс одним из самых посещаемых памятников города, местом паломничества и одним из региональных центров краеведения. Авторы комплекса органично соединили в мемориально-музейном комплексе сохранившиеся конструкции оборонительной цитадели и вновь возведенные Пантеон, галереи-трибуны, Стены памяти и площадь в форме звезды. Вход на территорию

комплекса предваряет триумфальная арка с датами обороны и освобождения Севастополя. Авторы используют возможности ландшафта в решении архитектурного образа комплекса. В зоне высокого морского побережья установлена обращенная к морю часовня во имя архистратига Михаила, план которой повторяет контур берега ступенчатыми очертаниями. Массивные гранитные ограждения несут памятные доски с номерами воинских частей, державших оборону. Вдоль линии берегового обрыва проложен прогулочный променада. Экспозиция располагается в подземных пространствах цитадели, где воссоздана атмосфера драматических событий 1942 года. В Пантеоне проводятся аудио-визуальные сеансы, посвященные подвигу защитников Севастополя. Лаконичные, лишенные декора архитектурные формы, создают острый и драматичный архитектурный образ.

ДИПЛОМ РААСН

Объект: Жилой комплекс «Подкова» (многоэтажные жилые дома со встроенными учреждениями общественного назначения и подземной автостоянками)

Авторский коллектив: А.А. Худин (руководитель), Е.Н. Полякова (НПП «Архитектоника», Нижний Новгород)

Комплекс состоит из жилых зданий с встроенными общественными помещениями, надземными и подземными автопарковками. Освоенный данным комплексом участок играет важную градостроительную роль в структуре города. Он формирует панораму застройки, раскрывающуюся на подъезде к центру Нижнего Новгорода по одной из основных магистралей Нагорной части – ул. Ванеева. Композиция комплекса в целом сформирована профессионально и грамотно. Метроритмическое построение четко отражает главный градостроительный смысл композиции, состоящей из двух 25-этажных башен на пересечении улиц, четырех 17-этажных блоков, формирующих основную тему композиции и трех 10-этажных домов, выступающих в виде «пауз» между основными элементами. Композиция решается со сложным наложением и взаимодействием составляющих ее элементов. Авторами обеспечено архитектурное разнообразие с сохранением единого авторского почерка, общности композиционных приемов и колористического решения. Грамотно и профессионально решены функциональные вопросы как по организации внутриквартальных пространств и парковочных мест, так и планировочного решения жилых домов с рациональной организацией секций и квартир. В объектах использованы нестандартные, оригинальные конструктивные решения. Проект жилого комплекса вызвал большой профессиональный и общественный интерес, получил высокую оценку архитектурного сообщества, относится к разряду образцовых примеров современной застройки Нижнего Новгорода.

В номинации «Лучшая опубликованная работа в области архитектурной науки»

ДИПЛОМ РААСН

Монография: «Архитектор двух эпох. О творчестве и размышлениях Владилена Красильникова»

Автор: А.В. Анисимов (Москва)

Монография посвящена творчеству и размышлениям Владилена Красильникова, одного из самых успешных архитекторов России второй половины XX – начала XXI вв. Автор рассказывает, как формировалась личность архитектора и его творческий почерк в меняющихся условиях жизни нашей страны. Книга состоит из двух частей: 1-я посвяще-

на периоду 1956-1990 гг., когда архитектор в основном был сосредоточен на проектировании театрально-зрелищных объектов; 2-я часть – период с 1991 г. по сегодняшний день, когда диапазон творческих интересов Красильникова расширился – появились новые темы проектирования, архитектор написал ряд книг и множество статей, посвященных проблемам нашей архитектуры и общественной жизни. Важной составляющей монографии стали так называемые «антракты»: беседы автора книги и В.Д. Красильникова в форме вопросов и ответов. А.В. Анисимов описывает и анализирует целый ряд проектов и построек В.Д. Красильникова, особенно подробно ансамбль «Красные Холмы», в котором Красильникову удалось максимально выразить свой метод композиционного мышления. Монографию отличает сдержанность и строгость оформления, прекрасное качество печати и иллюстраций, которые в полной мере поясняют и дополняют текст.

В номинации «Лучший неосуществленный архитектурный проект»

ДИПЛОМ РААСН

Объект: Новая сцена Академического Малого драматического театра – Театра Европы (*реализуемый проект*)

Авторский коллектив: М.А. Мамошин (*руководитель*), А.Х. Богатырева, А.М. Мамошин, П.В. Веселков, Д.Ю. Гришко, А.И. Щеглов (*Санкт-Петербург*)

Градостроительной сутью проекта Новой сцены Академического Малого драматического театра является его органическое включение в исторический контекст Семенов – исторической части Петербурга. Главный фасад со стороны Звенигородской улицы обозначает главный вход в театр; со стороны Багратионовского сквера организован вход на камерную сцену. Все фасады симметричны. Суть театра – обращение к традиции петербургской ментальной рядовой интровертной архитектуры начала XIX века. Архитектура театра умышленно консервативна и решена в эстетике, одновременно являющейся воспоминанием о существовавших в начале XX века общедоступных театрах на Семеновском плацу, рядовой непарадной архитектуре Петербурга и здания МДТ на улице Рубинштейна. Концептуально здание решено в виде базилики, пространство которой осваивал Театр в Средние века.

Проектируемое здание представляет собой единый комплекс, состоящий из 4-7-уровневого нового здания с цокольным и подвальным этажами, сблокированный с существующим историческим двухэтажным зданием. В новой части анфилады расположены: фойе главной сцены, зрительный зал на 600 мест с фойе, сценой, аръерсценой, монтажерский цех, главный репетиционный зал и фойе камерной (малой) сцены на 75 мест на верхнем уровне. «Домики», функционально включающие в себя артистические помещения, школу-студию, театральные мастерские, административно-хозяйственные помещения и т.п., периметрально обрамляют технологическую анфиладу. Существующее двухэтажное здание бывшего фуражарского двора Семеновского полка включает в себя входной двор-atrium, выставочное пространство, буфет и кассовый зал.

Размещение нового театрального здания, оснащенного новейшим технологическим оборудованием, внутри квартала плотной исторической застройки, определило архитектурное решение, построенное одновременно на эффекте взаимодействия исторического вида объемов здания и контрасте примененных современных материалов здания театра с его фасадами, облицованными естественным камнем, вставками остекленных структурным стеклом поверхностей и фасадов исторической окружающей застройки. Организация

сценического пространства построена на идее максимальной возможности установки любого сценического оформления и глубокой трансформации сцены и зрительного зала. Проект Новой сцены МТД получил высокую оценку профессионального сообщества.

ДИПЛОМ РААСН

Объект: «Концепция развития исторического центра Калининграда «Сердце города»

Авторский коллектив: Н.И. Явейн, И.Е. Григорьев, И.В. Кожин, К.О. Счастливцева (Архитектурное бюро «Студия-44», Санкт-Петербург)

Предметом осмысления авторов концепции стала территория площадью 70 га в самом сердце города, которой за 70 лет со дня переименования Кенигсберга в Калининград так и не удалось стать полноценным городским центром. О масштабе военных разрушений и утрат по сей день напоминают руины орденовского Королевского замка. В Калининграде так и не сформировался центр образцового социалистического города с недостроенным зданием Дворца Советов. Один из важных тезисов концепции под названием «Топология непрерывности» - о недопустимости переписывания градостроительной истории с чистого листа. Авторы концепции выступают против радикальных жестов вроде сноса Дворца Советов или панельных пятиэтажных домов: они – такие же свидетельства истории, как фундаменты кенигсбергских зданий. Всем этим «градостроительным ошибкам» «Студия-44» дает вторую жизнь – модернизирует, перепрофилирует, приспособливает к современным требованиям. Решая задачу восстановления связи времен в городской среде, авторы обращаются к идеологии средового подхода и выводят ее на новый уровень. Старинный Кенигсберг состоял из несхожих по характеру городских мест (Альтштадт, Лададии, Форштадт, Ломзе и т.д.). Концепция авторов проекта направлена на восстановление былого средового разнообразия, при этом воспроизводятся не стилевые признаки застройки, а ее структура, масштаб и характер. С этой целью написаны зональные регламенты, содержащие требования к габаритам домов, конфигурации кровель и оконных проемов, отделочным материалам и пр. Самый строгий регламент предусмотрен для Альтштадта, где под двухметровым культурным слоем погребены фундаменты и подвалы старинных домов. В кварталах Альтштадта производятся археологически раскопки, расчистка и реставрация сохранившихся подвалов зданий, усиление фундаментов, а также выемка грунта на внутренних незастроенных территориях до уровня пола самого глубокого подвала. На этой отметке формируются новые камерные площади. Новый Кенигсберг вырастет на руинах старого: стены современных зданий становятся продолжением сохранившихся стен цокольных этажей. Во вновь возводимых центральных кварталах города создаются условия для реинкарнации традиционного уклада жизни: малые производства и коммерция – в нижних этажах зданий, жилье – в верхних, улочки и камерные площади – для пешеходов. Регламенты застройки, представленные в концепции для территорий общей площадью 56 га, превращают проектное предложение в стратегию городского развития, дают ключ к реставрации исторического города как планировочного и средового феномена.

В номинации «Лучший учебник (учебное пособие)»

ДИПЛОМ РААСН

Учебное пособие: «История пространственных искусств. Архитектура XX-XXI вв.»

Автор: Т.В. Вавилонская (Самара)

Представленное на конкурс РААСН учебное пособие Т.В. Вавилонской адресовано студентам, обучающимся по направлению подготовки 07.03.01 «Архитектура». Цикл дисциплин «История пространственных искусств» является базовым, дисциплина «Архитектура XX-XXI вв.» в его составе требует постоянной актуализации. В одной книге представлены две части: «Архитектура модернизма» и «Архитектура постмодернизма». Учебное пособие является результатом многолетней работы автора по совершенствованию читаемого ею лекционного курса. Структура пособия четкая, системная и логичная, язык изложения ясный и доступный для студентов. Т.В. Вавилонская опирается на труды российских и зарубежных ученых, о чем свидетельствует широкая источниковедческая база. Учебное пособие отличает авторская методика обучения дисциплине, основанная на понимании явлений во взаимосвязи и преемственном развитии, отраженная в тексте пособия. Авторская методика рассчитана на активные формы обучения и предполагает глубокую аналитическую работу студента совместно с преподавателем. Автор рассматривает явления архитектуры во взаимосвязи с жизнью общества, эстетическими идеалами эпохи и пространственными концепциями. Размещение в пособии биографий архитекторов и иллюстраций по тексту будет способствовать легкому усвоению студентами изложенного материала.

Конкурс для молодых учёных и специалистов в возрасте до 35 лет включительно

В номинации «Опубликованная научная работа»

ДИПЛОМ РААСН

Серия статей:

1. «Вклад АСНОВА и АРУ в теорию и практику советского градостроительства в 1920-гг.».

2. «Аллея Ильича – от Дворца Советов к Ленинским горам: проектные предложения 1930-х гг.».

3. «Представления об архитектурно-планировочном ансамбле в трудах Л.А.Ильина и В.А.Лаврова 1930-х гг.».

4. «Представление об ансамбле в советской архитектуре 1930-х гг.: теория и практика».

5. «Облик новой Москвы в проектах архитектурного оформления и застройки набережных Москвы-реки в 1930-е годы».

6. «Разработка принципов проектирования жилых кварталов в советском градостроительстве 1930-х гг.».

7. «Наследие ВХУТЕМАСа_ВХУТЕИНа в теории советского градостроительства 1930-х годов».

Автор: Ю.Д. Старостенко (Москва)

В представленных на конкурс РААСН серии статей Ю.Д. Старостенко, вышедших в 2015-2016 гг., последовательно рассматривается становление градостроительства и

эволюция понятия «ансамбль» в проектной практике и теоретических концепциях советской архитектуры 1920-1930-х годов. Широкий охват исторического материала, исследование представлений об архитектурно-планировочном ансамбле в работах Л.А. Ильина и В.А. Лаврова, градостроительных концепций Н.А. Ладовского, Л.М. Лисицкого, участников АСНОВА, АРУ и других направлений позволили автору выявить глубинные связи основных положений Генерального плана 1935 года и культурного слоя 1920-х годов, показать пути формирования представлений об ансамбле и осмысления города в советской архитектуре от 1920-х до 1930-х годов.

В ОБЛАСТИ ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВА

В номинации «Лучшая опубликованная работа в области градостроительной науки»

ЗОЛОТАЯ МЕДАЛЬ РААСН

Монография: «Исторические города России: прошлое и настоящее»

Автор: Г.И. Кадышев (Москва)

Монография посвящена проблемам исторических городов России, являющихся одной из основополагающих культурных и исторических ценностей, созданных в процессе развития Российского государства, отображением национальной многовековой художественной памяти. Рассмотрены возможные пути совершенствования правового поля, обеспечивающего регулирование, планирование и организацию градостроительной деятельности в городах с богатым историко-культурным наследием.

В качестве первоисточника и основы для анализа проблем исторических городов использована сложившаяся на протяжении столетий система расселения Московской области, являющейся изначально центральным регионом страны.

Монография представляет собой результат многолетней проектной и научной деятельности автора. Г.И. Кадышев – автор многих градостроительных проектов, в том числе и тех, что определили правовую защиту исторических территорий и памятников градостроительства и архитектуры. Огромный профессиональный опыт и знания, талант архитектора, градостроителя и художника, методология ученого лежат в основе этой книги. Отличительной ее чертой является горячая гражданская заинтересованность, человеческая боль за судьбы наших городов и ландшафтов.

СЕРЕБРЯНАЯ МЕДАЛЬ РААСН

«Б.К. Еремин. Градостроительное искусство реконструкции исторических городов»

Составители: М.В. Комский, Б.В. Гандельсман, М.Н. Туркатенко, Г.А. Блейх (Москва)

Книга посвящена творчеству выдающегося архитектора, исследователя и ученого, профессора МАРХИ Бориса Константиновича Еремина – основателя отечественного направления в архитектуре, названного им «РЕТРОРАЗВИТИЕ», которое стало руководством в современной деятельности специалистов в области реконструкции городов. В годы, когда линия модернистского направления в советской архитектуре была всеобъемлющей и функциональный рационализм торжествовал повсюду, Б.К. Еремин посвятил свою жизнь выявлению скрытого и утраченного исторического архитектурного и градо-

строительного богатства российских городов и, в первую очередь, Москвы. Им были разработаны принципы реконструкции и воссоздания исторического облика допетровской Москвы, которые позже получили развитие в серии дипломных работ, смелых и одновременно основанных на исторических документах.

Книга демонстрирует мощный пласт архитектурного направления, связанного с выявлением, сохранением и включением архитектурного исторического наследия в современный город. Книга показывает еще одну сторону деятельности Б.К. Еремина – сочетание научных исследований с воспитанием целого ряда поколений своих последователей – студентов факультета «Градостроительство» МАРХИ, сегодня продолжающих его дело. Все позиции творческих и научных концепций Б.К. Еремина прекрасно раскрыты и изложены в фундаментальном издании, подготовленном авторами-составителями, коллегами и друзьями Б.К.Еремина.

ДИПЛОМ РААСН

Проект: «Практическая реализация технологии геоинформационного компьютерного моделирования ветровых потоков в проектах застройки многофункциональных комплексов»

Авторы: С.Б. Чистякова, В.А. Гутников, А.В. Сетуха, В.Ю. Кирякин, В.Г. Аковецкий (Москва)

Работа является результатом фундаментальных исследований, направленных на решение задач, связанных с формированием технологического уклада цифровой экономики. В основе предложенных в работе решений осуществляется переход от графо-аналитических расчетов к задачам физического моделирования воздействия ветровых потоков (в аэродинамических трубах) на объекты городской инфраструктуры, на их геоинформационные компьютерные цифровые модельные реализации.

Данная технология обеспечивает: пространственное позиционирование и моделирование территории различного функционального назначения; пространственное моделирование климатических показателей, процессов и явлений; математическое компьютерное моделирование воздействия ветровых потоков на исследуемой территории городской застройки на различных высотных уровнях и направлениях ветрового потока; оценку риска аэродинамического воздействия ветровых потоков на объекты, здания, сооружения и окружающую среду; графическое воспроизведение в аналоговой (бумажной) или цифровой форме результатов моделирования исследуемых процессов; аналитический расчет параметров воздействия ветровых воздействий на пешеходов, улично-дорожную сеть и инженерные конструкции; графическое воспроизведение в аналоговой (бумажной) или цифровой форме результатов моделирования нагрузок исследуемых процессов.

Разработанная технология, по сравнению с физическим моделированием процессов, обеспечивает повышение производительности выполнения работ в 3-5 раз, снижения стоимости до 3-4 раз, при сохранении требований к надежности полученных результатов оценки для исследуемых участков объектов.

На конкурс представлены 15 примеров практической реализации технологии геоинформационного компьютерного моделирования ветровых потоков в проектах застройки многофункциональных комплексов.

В номинации «Лучший реализованный градостроительный проект»

ДИПЛОМ РААСН

Проект: «Реализация проекта регенерации исторической застройки квартала №130 в г. Иркутске»

Авторы: Е.И. Григорьева, А.Ю. Макаров, М.Г. Меерович, С.В. Муллаяров, Л.Б. Ежова (Иркутск)

Реализованный проект регенерации средовой деревянной застройки типичного исторического квартала г. Иркутска - редкий для России пример активного вовлечения историко-культурного наследия в экономическое развитие города и использования его как градообразующего фактора, опыт возрождения крупного городского фрагмента исторической среды, в котором сочетались: реставрация, реконструкция, регенерация, перенос и восстановление исторических объектов, новое строительство, в том числе подземное, комплексное инженерное оборудование территории. Эксплуатация квартала ежегодно приносит в бюджет города около 1,5 млрд. руб. Благодаря сверх привлекательности созданного общественно-торгового, прогулочно-досугового пространства в квартале сформировалось на середину 2015 г. около 2000 рабочих мест. Фактически в квартал переместился общегородской центр активности горожан с самой высокой в Иркутске ежедневной посещаемостью, самой высокой стоимостью квадратного метра земли, самой высокой ценой аренды недвижимости. В 2012 году по результатам опроса 28 ведущих российских экспертов в области архитектуры и градостроительства, 130 квартал вошел в число 30 лучших проектов последних лет. В том же году по результатам опроса девелоперов, 130 квартал занял второе место в списке самых интересных и инвестиционно-привлекательных архитектурных сооружений страны, осуществленных в ушедшем году российскими и зарубежными специалистами. В 2016 году правительство России приняло решение рекомендовать к распространению в 2017 году по стране опыт комплексной регенерации квартала 130 в г. Иркутске (как драйвера развития территорий), в качестве модельного проекта для работ по регенерации исторической среды.

В номинации «Лучший градостроительный проект»

ДИПЛОМ РААСН

Концептуальный проект: «Благоустройство территории, прилегающей к реке Рогатка в г. Южно-Сахалинск»

Авторы: П.Ю. Андреев, А.Н. Бутырин, А.Л. Никифорова, М.М. Посохин (Москва)

Архитектурно-планировочная концепция благоустройства территории, прилегающей к реке Рогатка, выполнена по заказу МКП «Горархитектура» г. Южно-Сахалинска. Участок расположен вдоль русла реки от ул. Комсомольская до пр. Мира, включая территорию сквера им Г.И. Невельского. Общая площадь участка составляет 5,04 га. Южно-Сахалинск – испытал влияние различных культур, европейской и азиатской. Небольшое поселение Владимировка, став на 40 лет центром губернаторства Карафута и переименованное в Тайохару, превратилось в современный российский город. Сочетание, казалось бы, противоречащих друг другу, направлений японской архитектуры и архитектуры советских времен органично уживаются до сих пор, создавая неповторимый облик и дух города. На данном «противоречии» и основана идея представленной Архитектурно-

Лауреаты XX Конкурса на медали и дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук за лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук за 2016 год

планировочной концепции. Цель концепции создание в городе культурного, социально значимого объекта «разрывающего» привычное пространство набережной и парковых зон, формирующий самостоятельный общедоступный общественный кластер, вовлекая его в социально-активную городскую среду. Создание культурно-развлекательного центра под открытым небом. Предлагаемое архитектурно-планировочное решение уравнивает разнообразные по функции и архитектурному воплощению, но равные по притяжению, объекты городской среды. При этом пространство остается открытым и пронизываемым, приобретая значение культурной, исторической и эмоциональной части города.

В номинации «Лучший учебник (учебное пособие)»

ДИПЛОМ РААСН

Учебник: «История архитектуры» (3-х томах): «История архитектуры народов Азии и северной Африки III-XIX веков»; «История архитектуры стран Западной Европы эпохи Возрождения»; «История архитектуры Западной Европы и США Нового и Новейшего времени»

Автор: Ю.Н. Герасимов (Москва)

Учебник создан на кафедре «История архитектуры и градостроительства» МАРХИ на основе лекционного курса, в течение многих лет читаемого автором.

В томе, посвященном истории архитектуры народов Азии и северной Африки на основе анализа сохранившихся памятников архитектуры, а также зданий и сооружений, восстановленных путем научной реконструкции, изложены особенности развития архитектуры арабо-мусульманских стран, Ирана и Турции VII-XIX веков, Индии и стран Юго-Восточной Азии V - XVIII веков, Китая и Японии III – XIX веков. В томе «История архитектуры стран Западной Европы эпохи Возрождения» освещаются истоки архитектуры Возрождения, развитие архитектуры Италии XV – XVI веков, специфические черты архитектуры Возрождения в странах Западной Европы, представлены крупнейшие сооружения и ансамбли эпохи Возрождения и обозначена их роль в окружающем пространстве. «История архитектуры Западной Европы и США Нового и Новейшего времени» охватывает период XVII - начала XX веков. Дан анализ сохранившихся зданий и сооружений, большое внимание уделено теоретическим трудам по искусству и архитектуре того времени, раскрытию творческих методов мастеров архитектуры. Учебник прекрасно иллюстрирован, содержит большое количество натуральных фотографий, чертежей, рисунков, а также карт и таблиц, специально составленных для данного издания.

В ОБЛАСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ НАУК

В номинации «Лучшая опубликованная работа в области строительной науки»

ЗОЛОТАЯ МЕДАЛЬ

Комплект монографий: «Компьютерное материаловедение строительных композиционных материалов, автоматизации и управления технологическими процессами строительства»

Авторы: Ю.М. Баженов, В.А. Воробьев, В.П. Попов, А.В. Илюхин, О.И. Максимычев, А.М. Колбасин (Москва)

Компьютерное материаловедение композиционных материалов: в монографии рассматриваются теоретические и практические вопросы компьютерного моделирования

свойств композиционных материалов. На примере разработок авторов в области моделирования структуры строительных композиционных материалов описываются методики создания компьютерных программ для исследования свойств композитных материалов любого назначения.

Автоматизация приготовления бетонных смесей и изготовления железобетонных изделий и конструкций: в монографии рассмотрены вопросы, связанные с выбором качественного исходного сырья, подбора и оптимизации состояния бетонных смесей, используемых для производства бетонных и железобетонных изделий и автоматизации процессов их производства.

Организация и автоматизация землеройно-планировочных работ в дорожном строительстве: в монографии рассмотрены вопросы технологии выполнения землеройно-планировочных работ, выполняемых при возведении автомобильных дорог, приведены теоретические основы автоматизации этих процессов и примеры практической реализации по автоматизации этого вида работ.

Системный подход к автоматизации дорожно-строительных работ: в монографии рассмотрены вопросы системного подхода к автоматическому управлению дорожным строительством и автоматизации технологических процессов строительства автомобильных дорог.

ДИПЛОМ РААСН

Монография: «Роботизация и автоматизация строительных процессов»

Авторы: С.Г. Емельянов, А.Г. Булгаков, Л.М. Червяков, А.С. Асмолов, М.А. Бычкова, Н.С. Бузало (Новочеркасск, Курск)

Одним из путей интенсификации строительного производства является автоматизация технологических операций на основе использования достижений робототехники, мехатроники и информационных технологий. В монографии рассмотрены технологические особенности строительных операций, изложены принципы построения и структурная организация строительных роботов и мехатронных комплексов, описаны математические модели строительно-монтажных, отделочных и бетоноукладочных роботов, а также мехатронных скользящих комплексов для монолитного строительства. На основе исследований авторов изложены вопросы планирования траекторий движений, а также методы управления строительно-монтажными, отделочными, бетоноукладочными роботами и РТК, а также многомерными мехатронными скользящими комплексами.

В номинации «Лучший учебник (учебное пособие)»

ДИПЛОМ РААСН

Учебное пособие: «Строительные системы» (в 2-х частях)

Авторы: Б.М. Румянцев, А.Д. Жуков (Москва)

Часть 1 – «Системы внутренней отделки».

В первой части пособия представлен анализ материалов и строительных систем, используемых при внутренней отделке зданий (облицовок, перегородок, подвесных потолков, полов). С учетом опыта передовых фирм рассмотрены особенности применения систем внутренней отделки в различных условиях. Особое внимание уделено системам

«сухого строительства», системам, обеспечивающим акустический комфорт и пожарную безопасность.

Часть 2 – «Наружные системы облицовки и изоляции».

Во второй части пособия рассматриваются материалы и системы наружной отделки. В частности, решения по защите и утеплению фундаментов (ленточных и мелкозаложенных), периметра здания, контактирующего с грунтом (в том числе подвалов). Системные решения плоской кровли с различным функционалом, в том числе эксплуатируемых крыш с озеленением, а так под пешеходную и под транспортную нагрузки. Рассматриваются особенности формирования и монтажа систем скатной кровли: с минеральным покрытием, с металлическим покрытием и мягкой кровли. Рассматриваются фасадные и стеновые системы: вентилируемые и штукатурные фасады, системы каркасных зданий, кладки из эффективных материалов.

ДИПЛОМ РААСН

Учебник (в 3-х частях) и практикум (учебно-практическое пособие в 3-х частях)

«Сервейинг: организация, экспертиза, управление»

Авторы: П.Г. Грабовый, Н.Ю. Яськова, Н.Г. Верстина, Л.И. Павлова, С.Г. Шеина, Т.Ю. Овсянникова (Москва)

Учебник и практикум «Сервейинг: организация, экспертиза, управление» стал первым в России изданием, замкнувшим цикл обучения на формирование востребованных практикой новых компетенций не только у будущих, но и у действующих специалистов: строителей, девелоперов, застройщиков, проектировщиков, профессиональных управляющих недвижимостью, оценщиков, инвесторов, банковских работников, работников государственных учреждений и органов власти и др.

Сервейинг – это профессиональное комплексное, системное управление недвижимостью на всех этапах жизненного цикла объектов, включая проектирование, строительство и эксплуатацию, основная задача которого существенно повысить его эффективность в интересах собственников, пользователей недвижимости, государства и общества в целом. Можно сказать, что сервейинг представляет собой реализацию системного подхода по развитию и управлению объектами недвижимости.

Содержание сервейинга составляет совокупность организационных и управленческих мероприятий по проектированию, строительству и эксплуатации объектов недвижимости, включая: юридические, технические, экономические, физико-химические, экологические и другие виды экспертиз, проведение которых обеспечивает получение максимального эффекта на всех этапах жизненного цикла недвижимости. Проведение экспертиз тесно связано с выработкой практических рекомендаций по наиболее эффективному управлению конкретными объектами недвижимости, по их взаимоувязке в единый управленческий портфель, по стратегическому развитию всего комплекса объектов недвижимого имущества собственника.

Учебник и практикум «Сервейинг: организация, экспертиза, управление» нацелены на формирование знаний, умений и практических навыков применения эффективных методов и приемов решения основных проблем, связанных с осуществлением организационных, экономических и управленческих процессов в сфере недвижимости и обеспечением ее эффективного развития. Важность и актуальность этих направлений невозможно переоценить: в конечном итоге, именно профессиональное, основанное на науч-

ном знании и обогащенное практическим опытом управление обеспечивает успех дела в любых отраслях и сферах национальной экономики.

ДИПЛОМ РААСН

Учебник: «Гидравлика» (в 2-х томах)

Авторы: А.П. Зуйков, Л.В. Волгина (Москва)

Учебник охватывает все разделы дисциплины «Гидравлика», соответствующие государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по направлениям подготовки 08.03.01 «Строительство» и 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений», состоит из двух томов и содержит 19 глав.

Том 1 – «Основы механики жидкости» содержит главы: 1. «Жидкости и их основные физические свойства», 2. «Гидростатика», 3. «Кинематика жидкости», 4. «Динамика невязкой (идеальной) жидкости», 5. «Динамика ламинарных течений», 6. «Динамика турбулентных течений», 7. «Обтекание тел и теория пограничного слоя», 8. «Моделирование гидравлических явлений», в которых изложены основные законы равновесия и движения жидкостей.

Том 2 – часть 1. «Напорные и открытые потоки» содержит главы с 9 по 13, посвященные гидравлическим расчетам: равномерного, неравномерного и неустановившегося напорного движения жидкости в простых и сложных трубопроводах с учетом потерь напора по длине и местных гидравлических сопротивлений; истечения жидкости из отверстий и насадков; равномерного, неравномерного и неустановившегося течения в открытых каналах и руслах, расчету гидравлического прыжка, движения двухфазных сред и грунтовых вод.

Том 2 – часть 2. «Гидравлика сооружений». В данной части тома рассматриваются методы гидравлических расчетов основных гидротехнических сооружений и сопряжения бьефов, в том числе, водосливов, водосбросных плотин с уступом, водобойных и сопрягающих сооружений, шахтных и сифонных водосбросов, судоходных шлюзов, а также современные средства измерений гидравлических характеристик потоков в натуральных сооружениях и в лабораторных условиях.

ДИПЛОМ РААСН

Учебное пособие: «Строительная механика в примерах и задачах» (в 3-х частях): «Статически определимые системы» (часть 1); «Статически неопределимые системы» (часть 2); «Динамика сооружений» (часть 3).

Автор: Н.Н. Анохин (Москва)

Учебное пособие по курсу строительной механики, разработано в соответствии с программой для строительных специальностей вузов.

Часть 1 – Каждый параграф начинается с изложения соответствующего теоретического материала, затем приводятся с подробными решениями 125 характерных типовых примеров по теме и 575 задач для самостоятельного решения, к которым даны ответы. Пособие будет полезно студентам для самостоятельной работы при выполнении расчетных заданий и подготовке к экзаменам, а также может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий по расчету статически определимых плоских стержневых систем.

Лауреаты XX Конкурса на медали и дипломы Российской академии архитектуры и строительных наук за лучшие научные и творческие работы в области архитектуры, градостроительства и строительных наук за 2016 год

Часть 2 – Каждый параграф начинается с изложения соответствующего теоретического материала, затем приводятся с подробными решениями 106 характерных типовых примеров по теме и 659 задач для самостоятельного решения, к которым даны ответы.

Часть 3 – Учебное пособие разработано в соответствии с программой для строительных специальностей вузов по разделу «Динамика сооружений». В пособии рассмотрены методы определения частоты собственных колебаний, а также вынужденные колебания систем от различных видов динамических воздействий.

Каждый параграф начинается с изложения соответствующего теоретического материала, затем приводятся с подробными решениями 109 характерных типовых примеров по теме и 366 задач для самостоятельного решения, к которым даны ответы.



ОБ ИТОГАХ VI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ» («ЗОЛОТОВСКИЕ ЧТЕНИЯ»)

15 февраля 2017 года в Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН) состоялась VI Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»).

Организаторами конференции выступили:

- Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН);
- Научно-исследовательский центр СтаДиО;
- Научно-исследовательский центр «Строительство»;
- Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II (МИИТ);
- Московский архитектурный институт (государственная академия).

Научные направления конференции:

1. Моделирование жизненных циклов конструкций и сооружений на стадиях их возведения, эксплуатации, сопротивляемости прогрессирующему разрушению.
2. Нелинейные модели материалов, конструкций зданий и сооружений.
3. Материалы и конструкции в нестационарных физических условиях при сложных воздействиях.
4. Моделирование повреждаемости и разрушения конструкций. Математические модели в системах мониторинга зданий и сооружений.
5. Методы вычислительной математики в задачах строительной физики, численном и численно-аналитическом анализе конструкций и сооружений.
6. Возможности современных программных средств при анализе и проектировании строительных объектов. Решатели в задачах строительной физики. Применение вычислительной техники параллельной архитектуры. Проблемы и перспективы.
7. Дискуссия. Методические аспекты применения современных программных комплексов в учебном процессе. Место вычислительных методов прикладной механики в подготовке будущих инженеров-строителей. Постановка задачи, выбор математической модели, выбор расчётной модели, анализ результатов.

Мероприятие собрало более 50 участников – ученых и специалистов в области численного и компьютерного моделирования поведения строительных конструкций, зда-

ний, сооружений и комплексов из многих регионов нашей страны, а также из Украины, Польши и Ирана.

От Академии в работе конференции приняли участие вице-президент РААСН, академик РААСН В.И. Травуш (председатель научного комитета конференции), вице-президент РААСН, академик РААСН В.А. Ильичев, академик-секретарь Отделения строительных наук РААСН, академик РААСН Н.И. Карпенко, главный ученый секретарь РААСН, член-корреспондент РААСН П.А. Акимов (заместитель председателя научного комитета конференции), член-корреспондент РААСН А.М. Белостоцкий (заместитель председателя научного комитета конференции), советники РААСН В.Н. Сидоров (заместитель председателя научного комитета конференции), Т.Б. Кайтуков, С.Ю. Калашников, Г.Г. Кашеварова, В.Л. Мондрус и др.

С приветственным словом к участникам конференции выступили:

- академик-секретарь Отделения строительных наук РААСН, академик РААСН, профессор, доктор технических наук Н.И. Карпенко;

- главный ученый секретарь РААСН, член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук П.А. Акимов;

- член-корреспондент РААСН, профессор, доктор технических наук А.М. Белостоцкий;

- советник РААСН, профессор, доктор технических наук В.Н. Сидоров.

Тематика докладов конференции включала актуальные проблемы разработки и применения современных подходов к моделированию строительных объектов при изысканиях, проектировании, строительстве, эксплуатации-мониторинге и реконструкции, включая численные и аналитические методы расчета, применение современных программных комплексов и др. В частности, были сделаны следующие доклады:

- «Приветствие участникам конференции. Технологическая механика грунтов» – В.А. Ильичев;

- «Научная школа Золотова Александра Борисовича: история, современность и перспективы развития» – П.А. Акимов, А.М. Белостоцкий, В.Н. Сидоров, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева;

- «Проблемы компьютерного моделирования и пути их решения» – В.Н. Сидоров;

- «О вычислительных признаках различия критических точек и конкуренции собственных форм потери устойчивости» – С.Б. Косицын, Г.А. Мануйлов, М.М. Бегичев;

- «Интеллектуальная автоматизация инженерного обследования строительных объектов» – Г.Г. Кашеварова, Ю.Л. Тонков;

- «Удар летящего объекта о подвеску висячего моста с анализом разрушений» – В.Б. Зылёв, Н.А. Григорьев;

- «Особенности применения методов теории предельного равновесия для анализа сейсмической реакции строительных конструкций: реализация в ПК MicroFE» – В.А. Семенов, В.Л. Лебедев, Н.Н. Баглаев;

- «Анализ НДС плитных конструкций в приопорных зонах» – О.В. Кабанцев, А.В. Карлин, К.О. Песин;

- «Валидация компьютерных моделей ползучести бетона» – В.Н. Сидоров, К. Новак (Польша);

- «Построение математической модели перспективной конструкции мостотоннеля для пропуска легкового автотранспорта» – А.А. Локтев, В.П. Сычев, Р.Н. Степанов;
- «Методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении» – А.А. Семенов;
- «Численное моделирование аэроупругого поведения воздухоопорной оболочки» – С.И. Трушин, Н.А. Мокин;
- «Метод компенсирующих нагрузок для решения задачи о неосесимметричной деформации ледового покрова, ослабленного отверстием» – Е.Б. Коренева;
- «Моделирование физически нелинейных и анизотропных свойств материала при расчете строительных конструкций в программном комплексе ANSYS» – Н.С. Блохина, А.Г. Галкин;
- «Факторы влияния в задаче пробивания преграды жёстким сферическим телом» – В.Л. Мондрус, В.В. Вершинин;
- «Расчёт вертикальной цилиндрической конструкции на стохастическое воздействие волнения моря» – С.И. Бадулин, Д.Г. Левченко, В.В. Вершинин;
- «Особенности создания систем мониторинга линейных сооружений транспортной инфраструктуры в условиях арктической зоны и моделирования угроз повреждения многолетнемерзлых грунтов основания» – А.В. Вылиток;
- «Численное моделирование взрывных воздействий и получение огибающих избыточного давления на здания и сооружения сложных форм» – А.С. Павлов;
- «Влияние связанности уравнений термоупругости на осадку сооружения на мерзлом грунте» – Р.Н. Степанов, Ф.Б. Киселев, Ф.В. Сергеев;
- «Оптимизация затрат при моделировании жизненных циклов конструкций и сооружений по фазам и стадиям их возведения, эксплуатации, модернизации, вывода из эксплуатации и утилизации с учётом экологических норм и экстремальных условий» – Ю.В. Локтионов;
- «Трёхмерное численное моделирование аэроупругих колебаний тонкостенных оболочек в воздушном потоке» – А.М. Белостоцкий, И.Н. Афанасьева, Е.И. Бозняков.
- «Однородность/неоднородность структуры в фундаментальной проблеме управления сопротивлением конгломератных строительных композитов разрушению» – Е.М. Чернышов, А.И. Макеев (дистанционное участие);
- «Моделирование усиления конструкций композитными материалами в ПК «ЛИРА-САПР» – М.С. Барабаш (Украина), А.В. Пикуль (Украина), О.Ю. Башинская (Украина) (дистанционное участие);
- «Расчет задачи фильтрации на входе фильтра» – Л.И. Кузьмина, Ю.В. Осипов (дистанционное участие);
- «Двухэтапный сеточный метод решения краевых задач строительной механики на основе использования дискретного базиса Хаара» – М.Л. Мозгалева (дистанционное участие);
- «Реализация TVD-схемы численного решения задачи фильтрации» – Ю.П. Галагуз (дистанционное участие).



К ЮБИЛЕЮ ВИКТОРА СЕРГЕЕВИЧА ФЕДОРОВА

29 января 2017 года исполнилось 70 лет академику РААСН, доктору технических наук, профессору, Почетному железнодорожнику, Почётному транспортному строителю, Лауреату Премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники, заведующему кафедрой «Строительные конструкции, здания и сооружения» Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МГУПС (МИИТ)) Виктору Сергеевичу ФЕДОРОВУ.

Академик В.С. Федоров внес весомый вклад в экспериментальные и теоретические исследования в области огнестойкости строительных конструкций из композиционных материалов (железобетона и армо-полимербетона), развитие методов расчетной оценки огнестойкости конструкций и несущих систем в условиях стандартных испытаний и реальных пожаров, разработка практических методов повышения огнестойкости, а также подходов к оптимизации соотношения затрат на обеспечение огнестойкости с общим уровнем защиты в системе гибкого (объектно-ориентированного) противопожарного нормирования. Результаты его научных исследований нашли отражение в более 150 публикациях, в числе которых монографии, учебники, учебных пособия и изобретения.

Отмечая вклад Виктора Сергеевича в развитие архитектурно-строительного комплекса нашей страны и зарубежных государств, личный авторитет и профессиональные качества, не сомневаемся, что его знания, инициативность, организаторский талант и глубокое понимание проблем, стоящих перед отечественной наукой и практикой, позволят успешно решать актуальные задачи развития отрасли – фундамента общественного, социального и экономического развития России!

Желаем Вам, уважаемый Виктор Сергеевич, здоровья, счастья и дальнейших творческих успехов!

*Редакционный Совет международного научного журнала
“International Journal for Computational Civil and Structural Engineering”*